

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - UEG
UNIDADE UNIVERSITÁRIA CORA CORALINA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WELINGTON DOMINGOS ALVES
WENDER DOMINGOS ALVES

**UMA NOVA ABORDAGEM E CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES
CIRCULARES**

CIDADE DE GOIÁS – 2007

WELINGTON DOMINGOS ALVES
WENDER DOMINGOS ALVES

**UMA NOVA ABORDAGEM E CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES
CIRCULARES**

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Coordenação de Matemática da
Unidade Universitária Cora Coralina, da Universidade Estadual de Goiás, como
parte dos requisitos para obtenção do grau de Licenciando em Matemática.*

Orientador: Prof^o. Ms. Márcio Augusto F. Rodrigues

CIDADE DE GOIÁS - 2007

*Aos nossos pais que sempre lutaram com muito
esforço para garantir o sucesso de nossos
estudos. Que sempre souberam fazer das horas
difíceis, momentos de grande conforto e alegria.*

“Mestre é aquele que às vezes pára para aprender.”

João Guimarães Rosa

AGRADECIMENTOS

Ao nosso orientador Profº. Ms. Márcio Augusto F. Rodrigues pela dedicação e paciência demonstrados em todas as etapas deste trabalho. Agradeço também as inúmeras sugestões concedidas em conversas e reuniões de orientação que vieram a solidificar este estudo, as leituras atentas de nossos textos e as significativas contribuições, além do incentivo à superação dos nossos medos e inseguranças.

A nossa família pela admiração, respeito, confiança e ajuda que ao longo destes quatro anos foram essenciais para a nossa vitória.

A nossa irmã Renata M^a Domingos Alves por sua dedicação e esforço em nos ajudar e contribuir para o nosso crescimento pessoal.

Aos nossos Pais, Dorival Domingos Alves e Leonice M^a de Lucas Alves, que sempre confiaram em nossa capacidade e força de vontade, dando-nos o amor e a confiança necessária para a superação de nossos obstáculos.

A Deus, pela vida e pelo sucesso em todas as nossas buscas.

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar uma nova abordagem para o ensino das funções circulares, bem como realizar uma caracterização das mesmas, deste modo foi realizado um levantamento histórico sobre a trigonometria e suas aplicações na antigüidade. Assim, a pesquisa realizada mostrou o surgimento da trigonometria desde os estudos feitos pela astronomia até as suas aplicações incorporadas a análise matemática. Partiu-se do pressuposto de que muitas das obras até então pesquisadas, não traziam em seu conteúdo um aprofundamento em relação a estas funções, o que de certo modo deixa a desejar quando estudamos trigonometria. Deste modo, foram selecionados alguns livros didáticos para verificar e diagnosticar as principais defasagens trazidas pelos mesmos, no intuito final de que pudesse ser organizada uma nova forma de trabalhar com este conteúdo. Assim, foi feita toda definição sobre funções e os seus tipos, isso se deve ao fato de que posteriormente realizou-se uma caracterização de todas as funções circulares no âmbito de mostrar todas as suas peculiaridades. Contudo, identificaram-se as funções circulares como sendo crescente e decrescente par e ímpar, injetora e sobrejetora, sendo ainda demonstrado alguns desses casos. Para tal, foi proposto a utilização de um recurso tecnológico para garantir a agilidade e uma melhor construção dos gráficos das referidas funções. Pois estima-se que a interação do aluno com a tecnologia nos dias atuais seja um fator extremamente importante para integrá-los com o mundo moderno e desenvolver a capacidade de realizar análises e comparações. Este desenvolvimento proporcionará um ambiente facilitador para a construção e a apropriação dos conceitos das funções circulares. Todavia este trabalho teve um pressuposto teórico construtivista, respaldado na psicologia cognitiva de Vygotsky, pois acredita-se que a interação entre ensino e aprendizagem se dê de forma natural e resultante da dialética do homem com seu meio cultural. Espera-se que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para o crescimento das discussões em torno do ensino da matemática no que se refere a trigonometria e sua forma de abordagem e caracterização.

Palavras-chave: Educação Matemática. Trigonometria. Funções Circulares. Aprendizagem.

ABSTRACT

The objective of this study was to investigate a new form for the teaching of circular functions and realize a characterization of itself, in this way, a history rise was fulfilled about trigonometry and its applications in ancient times. So, the research showed the appearing of trigonometry since the studies did for astronomy until its applications incorporated in the mathematics analyse. Were noticed that many of works till then searched, didn't take in their contents, a deepen teaching of these functions and when study trigonometry, it can feel this deficiency. So, that's why were select some readers to check and diagnose the principals deficits that contain in it and try to find a new form to work with these contents. Like this, all definitions was prepared about functions and their types. A characterization of the all circulars functions was fulfilled with the objective to show all their mannerisms. However, the functions were identified like being crescent and not crescent, peer and peerless, injection and surjection. All the cases were demonstred. For this, was proposed a technological resource utilization to guarantee the agility and a better form to do these functions graphs. Well estimate that the student's interaction with the technology in now days be an important factor to integrate then with the modern world and comparsions. This development will propose a easy learning for construction and acquisition of the circulars functions concepts. However this study was based in the constructivist theory, of Vygotsky and his psychology cognitive, because that the interaction between teaching and result in the man's dialect with his cultural element. It hopes that this work can contribute to the growth of discussions about the mathematics teaching and its trigonometry, approach characterization.

Key words: Mathematics Education. Trigonometry. Circulars Functions. Learning.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 Problematização	13
1.2 Objetivos	14
1.2.1 Geral	14
1.2.2 Específicos	14
1.3 Metodologia	15
2 BASE TEÓRICA	17
2.1 Abordagem Psicológica	17
2.1.1 Desenvolvimento Infantil	18
2.1.2 Pensamento e Linguagem	19
2.1.3 A Linguagem	20
2.1.4 Interação Entre Aprendizado e Desenvolvimento, “Zona Proximal ou Potencial”	21
2.1.5 A Fase Escolar	22
2.2 A Matemática Numa Visão Crítica	24
2.3 Utilizando um Recurso Tecnológico	26
2.4 O Estudo das Funções	28
2.4.1 Noção de Função e Variável	30
2.4.2 Conceito de Função	31
2.4.2.1 O Sistema Cartesiano de Referência	32
2.4.3 Tipos de Funções	33
2.4.3.1 Função Crescente e Decrescente	33
2.4.3.2 Função Par e Ímpar	34
2.4.3.3 Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora	35
2.4.3.3.1 Reconhecimento Através do Gráfico	35
2.4.3.4 Função Periódica	37
3 A TRIGONOMETRIA DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E ESCOLAR	38
3.1 A Origem da Trigonometria	39
3.1.1 Os Gregos e a Trigonometria	42

3.1.2 A Participação dos Hindus na Trigonometria.....	45
3.1.3 A Contribuição dos Árabes e Persas.....	46
3.1.4 Europa: da Herança dos Hindus e Árabes, à Trigonometria Incorporada a Análise Matemática.....	48
3.2 Análise de Livros Didáticos.....	52
3.2.1 Aspectos Históricos.....	54
3.2.2 Introdução do Conceito e da Definição.....	54
3.2.3 Problemas e Exercícios.....	55
3.3 Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).....	55
3.3.1 Álgebra: Números e Funções.....	57
4 FUNÇÕES CIRCULARES.....	59
4.1 Circunferência Trigonométrica.....	59
4.1.1 Arcos Côngruos.....	61
4.2 Função Seno.....	62
4.2.1 Sinal da Função Seno.....	63
4.2.2 Gráfico da Função Seno.....	63
4.2.3 Período da Função Seno.....	65
4.2.4 A Função Seno é Ímpar.....	66
4.2.5 Injetividade e Sobrejetividade.....	67
4.2.6 Análise Gráfica da Função Seno.....	67
4.3 Função Cosseno.....	72
4.3.1 Sinal da Função Cosseno.....	73
4.3.2 Gráfico da Função Cosseno.....	73
4.3.3 Período da Função Cosseno.....	76
4.3.4 A Função Cosseno é Par.....	76
4.3.5 Injetividade e Sobrejetividade.....	77
4.3.6 Análise Gráfica da Função Cosseno.....	77
4.4 Função Tangente.....	78
4.4.1 Sinal da Função Tangente.....	79
4.4.2 Relação Entre Tangente, Seno e Cosseno de um Arco Trigonométrico.....	79
4.4.3 Gráfico da Função Tangente.....	80
4.4.4 Período da Função Tangente.....	81

4.4.5 A Função Tangente é Ímpar.....	81
4.4.6 Injetividade e Sobrejetividade.....	82
4.4.7 Análise Gráfica da Função Tangente.....	82
4.5 Função Cotangente.....	88
4.5.1 Sinal da Função Cotangente.....	90
4.5.2 Relação Entre Cotangente, Seno e Cosseno de um Arco Trigonométrico	90
4.5.3 Gráfico da Função Cotangente.....	91
4.5.4 Período da Função Cotangente.....	92
4.5.5 A Função Cotangente é Ímpar.....	92
4.5.6 Injetividade e Sobrejetividade.....	93
4.5.7 Análise Gráfica da Função Cotangente.....	94
4.6 Função Secante e Cossecante.....	94
4.6.1 Função Secante.....	95
4.6.1.1 Sinal da Função Secante.....	95
4.6.1.2 Gráfico da Função Secante.....	96
4.6.1.3 Período da Função Secante.....	97
4.6.1.4 A Função Secante é Par.....	97
4.6.1.5 Injetividade e Sobrejetividade.....	98
4.6.1.6 Análise Gráfica da Função Secante.....	98
4.6.2 Função Cossecante.....	98
4.6.2.1 Sinal da Função Cossecante.....	99
4.6.2.2 Gráfico da Função Cossecante.....	99
4.6.2.3 Período da Função Cossecante.....	101
4.6.2.4 A Função Cossecante é Ímpar.....	101
4.6.2.5 Injetividade e Sobrejetividade.....	101
4.6.2.6 Análise Gráfica da Função Cossecante.....	102
4.6.3 Relação Entre Secante e Cosseno e Entre Cossecante e Seno.....	102
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	104
6 REFERÊNCIAS.....	105

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma das mais importantes ferramentas da sociedade moderna. Apropriar-se dos conceitos e procedimentos matemáticos básicos contribui para a formação do futuro cidadão que se engajará no mundo do trabalho, das relações sociais, culturais e políticas. A matemática e as ciências exatas têm se tornado uma nova e efervescente fonte para a investigação de regras e estruturas. Elas nos ajudam a criar modos de descrever e lidar com os problemas, como também, tornam-se a fonte principal de reconstrução da nossa realidade (soluções).

A rapidez na evolução de novos saberes e na renovação das tecnologias evidencia a preocupação da sociedade atual em buscar elementos e criar estratégias que permitam superar os desafios do conhecimento, principalmente, no campo matemático, onde as dificuldades em compreender os conceitos e definições aumentam.

Como a matemática está, praticamente, presente em tudo, com maior ou menor complexidade, compreender e usar suas idéias básicas, bem como, a aplicabilidade no dia-a-dia é um direito de todos e não apenas daqueles que têm mais afinidade com o raciocínio lógico.

Nos últimos anos, uma das questões mais discutidas por educadores e pesquisadores na área de Educação Matemática está relacionada à metodologia de ensino adequada a realidade do educando. E também, como oferecer um ensino de qualidade, principalmente, na área de matemática, que é uma das disciplinas com maior índice de dificuldade de aprendizagem apresentada pelos alunos.

Este fato é muito preocupante, pois questiona-se quais fatores levam a esta dificuldade. É importante tentar mostrar que existem possibilidades de facilitar o ensino, mostrando ao aluno que a Matemática é parte importante da vida de cada um.

Nosso trabalho terá como foco o estudo das Funções Circulares, com o intuito de observar como se dá a compreensão do aluno com o conteúdo em questão, para que o mesmo possa, através de sua vivência, diagnosticar características importantes das Funções Trigonométricas. Esta pesquisa mostrará a importância de ressaltar a aplicabilidade das Funções seno, cosseno e tangente como funções periódicas e, portanto, constituindo modelos matemáticos adequados aos fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, como batimentos cardíacos, som, corrente elétrica alternada, movimento dos planetas, etc.

Segundo estudos realizados na área, às vezes, por falta de tempo ou por falta de domínio do próprio professor, a Geometria e a Trigonometria eram pouco trabalhadas nas escolas, isso gerou um alunado “deficiente” no que diz respeito ao estudo desses conteúdos.

Fazer com que se torne agradável e divertida a compreensão do estudo de Funções Circulares é um desafio pedagógico que queremos romper com o nosso estudo. Para isso, o projeto pretende desenvolver uma pesquisa em um contexto educacional que possibilite essa compreensão.

Um processo educacional envolve pessoas (estudantes e professores) que devem, naturalmente, desenvolver uma competência crítica. Essa competência é atribuída principalmente aos estudantes, pois embora suas experiências sejam falhas e fragmentadas, eles possuem experiência geral, que ao se relacionar com o professor, permite-lhes identificar assuntos relevantes para o seu processo educacional. Outro motivo, é que se a educação pretende desenvolver uma competência crítica, esta deve ser desenvolvida em capacidades já existentes.

Tradicionalmente, uma preocupação importante da Educação tem sido a de preparar os alunos para sua futura participação nos processos de trabalho na sociedade. Mas tendências alternativas na educação têm enfatizado que ela deve também preparar os indivíduos para lidar com os aspectos da vida social fora da esfera do trabalho, incluindo aspectos culturais e políticos. Em resumo, um dos objetivos da educação deve ser preparar o indivíduo para uma cidadania crítica. Neste contexto, é importante que a matemática seja contextualizada de modo que ela nos aproxime cada vez mais de nossa realidade.

Busca-se aqui, uma maneira de tentar ilustrar ao aluno a utilidade da matemática. É claro, que nesse sentido, estamos tentando construir a base de uma consciência crítica, na qual o aluno consiga de fato observar um determinado problema e aplicar a matemática para encontrar a solução de forma rápida e eficaz. Querem dar aos estudantes oportunidades para que eles façam suas descobertas acerca das Funções Circulares, pois acreditamos que a matemática é uma construção humana.

Buscar novas formas que facilitem o entendimento dos alunos, porém, não é o suficiente. A busca pelo conhecimento requer interesse, dedicação e compromisso dos educandos. Desse ponto de vista, o fundamental na educação é tornar os estudantes aptos a “criar matemática”, ou seja, conduzir o aluno a edificar, através de suas observações, conceitos matemáticos.

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

A trigonometria é, talvez, um dos conteúdos mais importantes da matemática, que é aplicado ao Ensino Básico, porém, ela vem sendo estudada e aplicada de maneira insatisfatória. A ela, não vem sendo dada a devida atenção que merece.

A trigonometria, às vezes, não é completamente vista em sala de aula, principalmente em escolas da rede pública de ensino, já que nestes recintos, os problemas de ensino e aprendizagem são maiores, acaba-se, então, não tendo tempo suficiente para que se aplique o conteúdo de trigonometria e em consequência o conteúdo de Funções Circulares.

Acreditamos que falta, durante a introdução do conteúdo de trigonometria, uma fundamentação histórica um pouco mais detalhada, que revele ao aluno os motivos que influenciaram o seu estudo e por consequência a sua aplicação na antiguidade até os dias atuais. Outro fator preponderante, que deveria ser mais bem aplicado nas salas de aula, são as demonstrações dos Teoremas de Tales e Pitágoras, dos valores de seno, cosseno e tangente nos ângulos de 30° , 45° e 60° , dentre outras demonstrações pertinentes, que contribuirão para a compreensão das Funções Circulares. Deste modo, acreditamos que se estes conceitos são assimilados pelo aluno, com certeza, este fato implicará em uma aprendizagem de qualidade.

Geralmente, os livros didáticos trazem este conteúdo no final e os seus exercícios são, em sua maioria, de forma mecanizada, o que acaba criando uma dificuldade em assimilá-lo. Pesquisar novas formas de como apresentar este conteúdo é sem dúvida um desafio pedagógico.

Nosso interesse em desenvolver este trabalho, se deve ao fato de não termos visto este conteúdo no Ensino Médio, de maneira que nos garantisse uma aprendizagem satisfatória. Porém, notamos que nossa deficiência não se deu apenas ao fato de não termos aprendido Funções Circulares, e sim, porque não tivemos desde o Ensino Fundamental um respaldo histórico e/ou um estudo mais aprofundado sobre aplicações da trigonometria.

Aprofundar no estudo e ensino das Funções seno, cosseno e tangente seria uma forma de resgatar nos professores e nos alunos o interesse pelo estudo dessas funções. O ensino de Funções Circulares deve ser trabalhado de forma contínua com o conteúdo de trigonometria, sendo feito demonstrações, análises gráficas, dentre outros incentivos que motivem tanto o professor quanto o aluno, para que as dificuldades não aflorem nos alunos quando este lhes é transmitido.

Assim, esse conteúdo deve ser cuidadosamente planejado com intuito de promover o ensino de Funções Circulares de qualidade aos alunos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Geral

Apresentar uma nova abordagem do ensino das funções circulares, utilizando a construção de gráficos e realizar uma caracterização das mesmas. Recorrer a recursos tecnológicos, como método didático, para reconhecer e identificar o comportamento dos gráficos em determinadas situações.

1.2.2 Específicos

Este trabalho deseja pesquisar e mostrar para o profissional da educação métodos e procedimentos que o levem a:

- Apreciar a história da matemática (trigonometria), para que o mesmo consiga transmitir a importância de estudar Funções Circulares;
- Desenvolver a conscientização da importância das demonstrações trigonométricas feitas aos alunos;
- Relacionar o estudo de Funções Circulares com o seu cotidiano, para que o aluno não fique apenas com idéias abstratas;
- Ressaltar a importância de construir gráficos durante as demonstrações e exercícios;
- Identificar se uma função trigonométrica é par ou ímpar;
- Reconhecer se uma função circular é crescente ou decrescente;
- Verificar se uma função trigonométrica é injetora, sobrejetora ou bijetora;
- Construir e comparar diferentes tipos de funções através de seus gráficos.

1.3 METODOLOGIA

Este trabalho teve início na ânsia de fazer da Matemática uma ciência para que todos possam se apropriar dela. Esta preocupação leva a pensar e tentar encontrar práticas pedagógicas inovadoras, para que o saber fazer de cada professor se torne o saber fazer dos alunos.

O trabalho, como um todo, adota uma perspectiva metodológica variada. Os procedimentos da pesquisa foram divididos em cinco partes principais.

A primeira parte dá ênfase nos aspectos psicológicos do indivíduo, segundo as teorias de Vygotsky. Para tal, foram realizadas pesquisas em vários livros que tratam do relacionamento dessa teoria com prática educacional. O objetivo dessa pesquisa foi encontrar uma melhor forma de se trabalhar o aspecto psicológico do aluno, de forma que este consiga através de sua vivência, absorver os conhecimentos transmitidos pelo professor.

A segunda parte faz um levantamento histórico sobre a trigonometria como um todo, em especial, é trabalhado com maior enfoque a nota histórica sobre as funções trigonométricas.

Para o estudo da história das funções circulares, foi necessário buscar informações em várias bibliografias e artigos voltados ao tema. Porém, é válido ressaltar que em muitos desses trabalhos o texto apresentava lacunas, onde o leitor, possivelmente, em vários trechos seria conduzido a uma reflexão vaga ou distorcida dos fatos.

Como o ensino tende a procurar a utilização dos recursos tecnológicos para o processo de ensino e aprendizagem, a terceira parte deste trabalho, reserva uma orientação importante no que diz respeito ao uso da tecnologia em sala de aula. Acredita-se que a escolha certa de softwares para serem trabalhados com os alunos pode melhorar a qualidade do ensino a eles oferecido.

Sendo o livro didático a maior ferramenta que o professor possui dentro da sala de aula, se fez necessário a análise do conteúdo proposto nesse recurso. Foi realizada uma análise verificando se os livros traziam o contexto histórico do assunto, bem como a linguagem utilizada para a apresentação do conteúdo e para a construção dos conceitos e definições. Além disso, foi verificada, a forma com que os exercícios foram propostos aos alunos. A preocupação nesse sentido é a de verificar se os exercícios ajudam o aluno a construir os conceitos e as definições e até mesmo se estes traziam aplicações ou eram apenas exercícios “mecanizados”.

Outro item que merece destaque são os PCN's. Esta pesquisa foi motivada, pelo fato de que, são os PCN's os norteadores do professor a nível nacional.

A última parte foi destinada ao conteúdo das Funções Circulares, na qual se tomou a preocupação de se apresentar toda uma construção da definição de função, bem como todos os outros pré-requisitos necessários para o bom desenvolvimento da pesquisa. Neste aspecto foi destacado o conceito de vários tipos de funções, tais como: crescente e decrescente, par e ímpar, injetora, sobrejetora, bijetora e as funções periódicas.

Tais definições e conceitos foram analisados em diversos livros, onde se buscou a melhor linguagem para se trabalhar o tema, a fim de facilitar a compreensão do leitor. Facilitar a compreensão do leitor se deve ao fato das demonstrações utilizadas na exposição do conteúdo.

2 BASE TEÓRICA

2.1 ABORDAGEM PSICOLÓGICA

Para que este trabalho consiga alcançar seus objetivos, nos respaldaremos na concepção psicológica interacionista de Lev Semenovitch Vygotsky.

Vygotsky afirma que as características humanas não estão presentes desde seu nascimento, elas resultam da interação dialética do homem e seu meio sócio-cultural. Sendo assim, as funções psíquicas humanas se originam nas relações do indivíduo e seu contexto cultural e social. A cultura é, portanto, parte constitutiva da natureza humana. Ao modificar o seu ambiente através de seu comportamento, essa mesma modificação muda o seu comportamento futuro. O cérebro acaba funcionando como um “sistema aberto”, dependendo da necessidade do indivíduo, ele é capaz de lhe servir novas funções.

O homem consegue transmitir a sua experiência, assimilar a experiência alheia, além de transmitir a experiência das gerações anteriores. Nesse aspecto, o funcionamento das características humanas não são transmitidas por hereditariedade, o que nos leva há uma forte reflexão: de que tais características não estão associadas ao indivíduo desde seu nascimento. Assim, essas características são edificadas ao longo de sua vida através de um processo de interação do homem e seu meio físico e social. Daí, devemos destacar o importante papel desempenhado pelas escolas.

Focando nosso estudo nesta perspectiva, as pesquisas de Vygotsky nos mostram que o complexo do psiquismo humano está relacionado ao emprego de instrumentos e ao surgimento da linguagem. Estas são as ferramentas com as quais o homem não só domina o meio ambiente como também, o seu próprio comportamento. Deste modo, Vygotsky centra suas pesquisas no desenvolvimento infantil, uma vez que é neste período que essas “ferramentas” são aprendidas.

Para Vygotsky, o desenvolvimento do sujeito humano se dá a partir das constantes interações com o meio social em que vive, já que as formas psicológicas mais sofisticadas emergem da vida social. Assim, o desenvolvimento do psiquismo humano é sempre mediado por outro, que indica, delimita e atribui significados a realidade. Quando internalizados, estes processos começam a ocorrer sem a intermediação de outras pessoas.

Vygotsky afirma, ainda, que é na atividade prática, nas interações estabelecidas entre os homens e a natureza, que as funções psíquicas, especialmente as humanas, nascem e se desenvolvem, transformando assim, o homem em um ser que interage com seu próprio meio.

Assim, o sujeito não é visto apenas como aquele que recebe passivamente as informações do exterior. O sujeito é aquele que é capaz de interagir com o meio em que vive e a partir disso, construir seu próprio mundo. Este não deve, portanto, ficar condicionado a passividade do meio exterior. Este deve, no entanto buscar aprimorar seus conhecimentos através de sua própria prática e esforço, não se limitando ao estudo do comum e nem tentar buscar algo que lhes é distante demais. O indivíduo deve buscar seu crescimento intelectual de acordo com sua maturidade, diálogo, cooperação e troca de informações mútuas com seus semelhantes.

2.1.1 Desenvolvimento Infantil

Para explicar o desenvolvimento infantil, Vigotsky faz uma interessante comparação do estudo da criança à botânica. Nesse contexto, entende-se que o desenvolvimento da criança depende de um processo de maturação do organismo como um todo. Nesse sentido, ele ainda chama a nossa atenção para o uso do termo “jardim de infância”, que é designado aos primeiros anos de educação infantil, e a concepção botânica. Pois é, na escola que a criança amadurece suas idéias e conhecimentos até então adquiridos em seu grupo familiar, assim, a escola é responsável pelo processo maturação e de formação científica da criança.

Essa concepção se apóia na idéia de que “a mente da criança contém todos os estágios do futuro desenvolvimento intelectual: eles existem já na sua forma completa, esperando o momento adequado para emergir” (VYGOTSKY, apud, REGO, 1995, p. 57). Porém, Vygotsky considera que a maturação biológica é secundária, uma vez que o comportamento da criança depende e sofre alterações, quando esta interage com meio e sua cultura.

O comportamento da criança recebe influências dos costumes e objetos de sua cultura. Através das intervenções constantes do adulto, que os processos psicológicos mais complexos começam a se formar.

Vygotsky explica que as características individuais (modo de agir, de pensar, de sentir, valores, conhecimentos, visão de mundo etc.) dependem da interação do ser humano com o meio físico e social. No início da vida, os fatores biológicos têm preponderância sobre os fatores sociais. Aos poucos, as interações com seu grupo social e com objetos de sua cultura passam a governar o comportamento e o desenvolvimento de seu pensamento.

Desde o nascimento, a criança está em constante cuidado do adulto, que lhe assegura todas as suas necessidades básicas, assim, o seu comportamento recebe influências dos costumes e objetos de sua cultura. O desenvolvimento infantil está intimamente relacionado com o seu meio sócio-cultural em que ele se insere e se processa de forma dinâmica e dialética. E é através das constantes mediações do adulto, que os processos psicológicos infantis mais complexos começam a se formar. “Por intermédio dessas mediações, os membros imaturos da espécie humana vão pouco a pouco se apropriando dos modos de funcionamento psicológico, do comportamento e da cultura, enfim, do patrimônio da história da humanidade e de seu grupo cultural.” (REGO, 1995, p. 61).

2.1.2 Pensamento e Linguagem

Vygotsky dedicou-se por vários anos ao estudo do pensamento e da linguagem, e nesse sentido, ele nos revela que essa relação passa por várias mudanças ao longo da vida. Apesar de terem origens diferentes e se desenvolverem de modos independentes, é graças a inserção da criança na sociedade, que o pensamento e a linguagem se entrelaçam, originando, então, o modo mais complexo do funcionamento do psiquismo humano (chamamos aqui a atenção para refletirmos sobre a inserção da criança na escola).

A linguagem torna-se para a criança um marco fundamental em sua vida. É a partir daí que ela consegue providenciar instrumentos e organizar soluções para um problema. A linguagem é, então, uma nova forma de atividade superior nas crianças. Assim, ela expressa tanto o pensamento da criança e também age como organizadora desse pensamento.

Na medida em que a criança se relaciona e se comunica com os indivíduos mais maduros de seu grupo social, ela aprende a usar a linguagem como instrumento do pensamento e, conseqüentemente, como meio de comunicação. É justamente nesse momento da vida, que o pensamento e a linguagem se associam dando expressão verbal ao pensamento e tornando a fala racional.

Aos poucos, a linguagem torna-se uma ação planejada do pensamento para a realização de uma ação futura, quando isso acontece, pode-se verificar que o indivíduo consegue ir além de suas experiências imediatas.

Assim, a escola deve atuar como um forte agente de consolidação do pensamento racional, pois enquanto professores, sabemos que os alunos sabem muito mais do que são capazes de explicar com palavras.

2.1.3 A Linguagem

Segundo REGO (1995, p. 53)

O surgimento da linguagem imprime três mudanças essenciais nos processos psíquicos do homem:

- A linguagem permite lidar com os objetos do mundo exterior mesmo quando eles estão ausentes;
- Através da linguagem é possível analisar, abstrair e generalizar as características destes objetos, eventos, situações presentes na realidade;
- A função de comunicação entre os homens que garante, como consequência, a preservação, transmissão e assimilação de informações e experiências acumuladas pela humanidade ao longo da história.

A interação do indivíduo com o mundo é feita através da linguagem, esta já é, por excelência, um mediador entre os dois. É através da linguagem que a dialética se desenvolve, dando possibilidade ao funcionamento psicológico e ao processo de formação dos pensamentos. Nessa perspectiva, Vygotsky afirma que o homem constitui-se de suas interações sociais e este é visto como alguém que transforma e é transformado nas relações produzidas em uma determinada cultura. É por isso que seu pensamento é chamado de sócio-interacionista, investigando o sujeito na sua interação com o mundo, sua relação com os demais indivíduos e a construção do seu próprio conhecimento.

A invenção da linguagem e a mediação humana possibilitaram a espécie humana dar um salto em sua evolução. O homem pode controlar voluntariamente sua atividade psicológica e ampliar sua capacidade de atenção, memória e acúmulo de informações.

Vygotsky ressalta, ainda, a aquisição da linguagem escrita como um fator de nova mudança na vida do indivíduo e esta, por sua vez, promove modos diferentes e ainda mais abstratos de pensar, comunicar-se com as pessoas e com o conhecimento.

Nesta nova fase é importante ressaltar o papel desempenhado pelas escolas, pois o aprendizado da linguagem escrita envolve a elaboração de todo um sistema de representação da realidade.

A linguagem nos permite lidar com os objetos do mundo exterior, mesmo quando eles estão ausentes. A linguagem possibilita analisar, abstrair e generalizar as características dos objetos, eventos, situações na realidade. Logo, a linguagem permite ao homem a preservação, transmissão e assimilação de informações e experiências acumuladas ao longo de sua história. É por esta razão que Vygotsky afirma que os processos de funcionamento mental do homem são fornecidos pela cultura, através da mediação simbólica. É justamente por fornecer significados precisos, que a linguagem permite a comunicação entre os homens.

2.1.4 Interação Entre Aprendizado e Desenvolvimento, “Zona Proximal ou Potencial”

O aprendizado é considerado um aspecto não só fundamental, como também necessário ao bom desenvolvimento das funções psicológicas do ser humano. Nesse sentido, o aprendizado é determinado pelo convívio que o indivíduo tem com o seu grupo social e cultural. E é esse convívio que garante o desenvolvimento das características observadas no homem. Nesta visão de Vygotsky, daremos ênfase às peculiaridades que envolvem as crianças e os adolescentes no período escolar, pois apesar de sabermos que o aprendizado se inicia bem antes da fase escolar, é nela que se introduzem elementos novos no seu desenvolvimento.

Vygotsky nos evidencia dois níveis de desenvolvimento: o real ou efetivo e o potencial. Nesse primeiro nível é observado as capacidades já dominadas pelo indivíduo, ou seja, aquelas capacidades que a criança ou adolescente consegue desenvolver sem a ajuda de um adulto ou de uma pessoa mais experiente. No entanto, nosso interesse é destacar o desenvolvimento potencial estudado por Vygotsky.

O desenvolvimento potencial também se refere ao que o indivíduo consegue fazer ou produzir sozinho, só que mediante a ajuda de uma outra pessoa (seja ela uma outra criança mais experiente ou um adulto).

Vygotsky chama a distância entre aquilo que a criança consegue fazer de forma independente e aquilo que ela realiza com a colaboração de seu grupo social de “Zona de desenvolvimento potencial ou proximal”.

Nesta abordagem, devem-se trabalhar as funções ainda não amadurecidas, as que estão em processo de maturação. É neste momento que entra a mediação do adulto e, mais especificamente em nosso contexto, a figura do professor. Pois é justamente o aprendiz que é responsável por criar esta zona de desenvolvimento proximal, e, na medida em que há a interação com outras pessoas, é que somos capazes de realizar tarefas que antes não conseguíamos desempenhar sozinhos, pois de fato, “aquilo que é zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã.” (VYGOTSKY, apud, REGO, 1995, p. 74).

Ao levarmos os estudos de Vygotsky para o plano pedagógico, podemos considerar que, através do desenvolvimento da zona proximal, é possível observar os ciclos já completados e os que estão em via de formação. Tal fato permite ao profissional da educação elaborar seu planejamento de ensino-aprendizagem com planos e estratégias que auxiliem este processo, visando sempre a melhoria do aprendiz, como também, uma maior, melhor e eficaz assimilação por parte de quem recebe este conhecimento ou aprendiz.

2.1.5 A Fase Escolar

Na perspectiva vygotskyana, o desenvolvimento e a aprendizagem estão inter-relacionados desde o nascimento, mas para explicar melhor o papel da escola no processo de desenvolvimento do indivíduo, Vygotsky faz uma distinção entre os conhecimentos construídos e adquiridos no cotidiano e aqueles elaborados em sala de aula, os chamados por ele de conhecimentos científicos.

No conceito cotidiano, uma palavra para uma criança tem um significado, mais especificamente, aquele aprendido em sua casa junto com sua família. No conceito científico, esta mesma palavra pode atingir diversos significados. É nesse sentido, que a escola atua como agente enriquecedor do conhecimento já adquirido, desempenhando um papel importante na formação dos conceitos. A escola propicia aos alunos um conhecimento sistemático dos já conhecidos, possibilitando assim, o acesso ao conhecimento científico construído e acumulado pela humanidade.

Ao falarmos da inserção do indivíduo na escola, devemos considerar duas importantes abordagens observadas por Vygotsky: a inatista e a ambientalista. A primeira se baseia na capacidade básica de cada indivíduo, personalidade, potencial, comportamentos; já

se encontram praticamente prontas desde o início de seu nascimento. Na prática pedagógica, esta visão nos revela que as capacidades e o desempenho do aluno são de sua inteira responsabilidade, isentando assim, a própria dinâmica interna da escola e o papel do professor. Esses serviriam apenas como meros transmissores do conhecimento, e a assimilação dele seria uma capacidade individual.

Em nossos estudos e pesquisas não devemos descartar a abordagem inatista, todavia nos respaldaremos na abordagem ambientalista, que atribui exclusivamente ao ambiente a constituição das características humanas. Assim, as características individuais são provocadas por fatores externos ao indivíduo. Nesse sentido, a escola tem o poder de formar e transformar o indivíduo, e a sua função básica é a preparação do moral e intelectual do aluno para que este possa assumir seu “lugar na sociedade”.

Lembramos, neste momento, que o papel do professor é de suma importância, uma vez que este possui de forma sistemática, o conhecimento sobre determinado assunto a ser transmitido ao aluno. Cabe ao professor atuar como mediador desse conhecimento, estimulando as capacidades inatas do aluno na busca pela compreensão dos conteúdos, além de promover e ascender à curiosidade e interesse do mesmo pelo estudo. É válido nesse contexto, propor aos alunos desafios que os levem a compreensão do objeto de estudo, pois acreditamos que as capacidades de cada aluno podem ser estimuladas de forma que consigamos extrair seu potencial até então adormecido.

Voltando nossa memória a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) e relacionando-a com o plano pedagógico, a escola desempenhará bem o seu papel, se ela aproveitar aquilo que o aluno já sabe e assim ampliar seus conhecimentos, ou seja, amadurecê-los.

A escola deve ser capaz de desenvolver nos alunos capacidades intelectuais que lhes permitem assimilar plenamente os conhecimentos acumulados. Isto quer dizer que ela não deve se restringir à transmissão de conteúdos, mas principalmente, ensinar o aluno a pensar, ensinar formas de acesso e apropriação do conhecimento elaborado, de modo que ele possa praticá-lo automaticamente ao longo de sua vida, além de sua permanência na escola. (DAVIDOV, apud, REGO, 1995, p. 108).

2.2 A MATEMÁTICA NUMA VISÃO CRÍTICA

Segundo SKOVSMOSE (2002, p. 62), “para melhorar nosso entendimento, movemo-nos na direção de mais conhecimento, dependemos um do outro. (...) Mas se interagirmos numa relação dialógica (diálogo), seremos capazes de nos mover na direção de mais conhecimento.” É importante desenvolver uma consciência matemática crítica em nossos alunos, desse modo, devemos nos ater em criar situações em que os alunos, através do diálogo, interajam-se, onde, possivelmente, emergirão suas dúvidas e a vontade de saná-las.

A matemática pode ser vista como parte de um processo de desenvolvimento do crescimento humano. Isso significa que a matemática tornou-se parte integrante de nossa cultura. Se “subtrairmos” a matemática de nossa atual sociedade, o que teríamos como resposta? Neste aspecto, propõem-se que a sociedade pense como seria um computador sem a matemática ou como seria a construção civil sem ela. Nossa reflexão pode ir mais além: A engenharia elétrica e mecânica; O cálculo dos impostos, juros e a restituição do Imposto de Renda; A quantidade correta de determinada substância de um remédio; O funcionamento de aparelhos, como, ressonância magnética e o cardiograma; As transmissões de rádio. Estas são algumas das questões que ficam maquiadas quando estudamos matemática.

O que nossos alunos não sabem é que a matemática está presente em todos estes campos. Além disso, a mesma representa para estas áreas a estrutura básica que sustenta seu bom funcionamento. Partindo desse ponto de vista, a maior competência que um indivíduo deve adquirir, ao estudar matemática, é que ele possa refletir sobre seu uso e suas aplicações.

Segundo Skovsmose, vemos que é essencial os problemas se relacionarem com situações e conflitos sociais fundamentais, e é importante que os estudantes possam reconhecer os problemas como “seus próprios problemas”. Nessa visão, podemos dizer que o aluno deve interagir com o meio, ou seja, utilizar-se dos conhecimentos científicos para aproveitá-los em seu dia-a-dia.

Na Educação Matemática, é muito importante o papel do professor, porém, este não irá trabalhar como um mero transmissor do conhecimento pronto e acabado. O professor deve destacar-se como orientador ao processo de aprendizagem, oferecendo aos estudantes oportunidades para fazerem eles mesmos as suas “descobertas” e formar seus próprios “conceitos”. Tratamos aqui a “descoberta” e o “conceito” como a compreensão coerente e correta de um determinado conteúdo. Desse modo, é importante dar uma interpretação mais concreta a termos abstratos, e fazê-los mais compreensíveis aos alunos. Seguindo este

raciocínio, se quisermos edificar em nossos alunos uma consciência crítica da realidade é fundamental que a Educação Crítica interaja com a Educação Matemática.

A educação deve ser orientada para problemas, ou seja, orientada em direção a uma situação “fora” da sala de aula, assim estaríamos engajando o aluno em um pensamento crítico e conseqüentemente tentando despertar melhor a visão da matemática.

Vamos expor então, algumas idéias que servirão de reflexão para compreendermos o parágrafo acima. Como veremos na abordagem histórica deste trabalho, a matemática desenvolveu-se da necessidade humana e, desde a antiguidade, é aplicada para solucionar problemas do cotidiano. Vemos que, atualmente, a matemática tem um campo extenso de aplicações, constituindo uma parte integrada e única da sociedade. Em particular, devemos ser capazes de compreender as funções de aplicações da matemática, e a melhor maneira de aprender, é sem dúvida, praticar. Em nosso caso: ler, escrever, observar, estabelecer relações, pesquisar e sempre manter-se em busca de novas interações que possibilite a ampliação de nosso conhecimento.

2.3 UTILIZANDO UM RECURSO TECNOLÓGICO

A humanidade está envolvida pela tecnologia. A sociedade e a tecnologia estão integradas, e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação. De fato, todas as aplicações de um computador podem ser vistas como uma aplicação de um modelo matemático simples ou complexo.

Escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologias. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa no futuro. O grande desafio para a educação é pôr em prática hoje o que vai servir para o amanhã. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 80)

Em nosso trabalho, sugerimos a utilização de um software que auxilie no estudo das Funções Circulares.

“Tecnologia é o aspecto dominante da civilização, e o homem está completamente imerso nessa tecnologia” (ELLUL, apud, SKOVSMOSE, 2001, p. 29). Segundo o pensamento de Ellul, a tecnologia tornou-se parte integrante e indispensável da vida humana. A medida que o homem desenvolveu a tecnologia com o intuito de melhorar o seu bem-estar social, este tornou-se dependente dessa estrutura. A cada nova invenção e descoberta tecnológica o homem se vê, cada vez mais, mergulhado neste complexo mundo tecnológico. Tal fato é possível ser observado com os programas de implantação de laboratórios de informática lançados pelo governo em escolas públicas e o crescente aumento das “**lan houses**” e “**cyber cafés**” em cidades interioranas. Cada vez mais, encontramos crianças e jovens operando aparelhos eletrônicos, principalmente, computadores. A tecnologia faz parte do mundo moderno e, nesse sentido, acreditamos que ela é importante. Trabalhá-la em sala de aula pode contribuir significativamente para formação do indivíduo, preparando-o para a vida cotidiana e o mercado de trabalho.

O que está sendo proposto não é discutir como o homem está inserido nessa estrutura e de que forma isso ocorreu. Iremos, apenas, nos respaldar em um recurso tecnológico computacional como método didático. Cremos que este será um atrativo e servirá de estímulo ao estudo das Funções Circulares.

O recurso a ser utilizado é o software “**Graphmática**”. Este programa gera gráficos no plano (x, y) , de modo que ao digitarmos uma função o programa, gera o seu gráfico. Para tanto, é necessário que o professor domine conhecimentos básicos de informática, todavia, como foi dito anteriormente, em nossos dias é comum o convívio de professores e alunos com recursos tecnológicos.

Este recurso será explorado com a finalidade de agilizar a construção dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente, bem como facilitar a comparação do comportamento dos gráficos das referidas funções. Além disso, ele só poderá ser utilizado depois que os alunos tiverem assimilado bem os conceitos de função e construção de gráficos, servindo apenas como material de apoio, que acreditamos nesse caso, ser de grande valia para o ensino. Ole Skovsmose afirma, ainda em sua obra “Educação Matemática Crítica: A questão da democracia”, que a Educação Matemática desenvolve uma postura em relação à sociedade tecnológica, onde algumas pessoas podem gerenciar problemas tecnológicos com facilidade, uma vez que a matemática constitui a mais significativa base das ciências tecnológicas.

2.4 O ESTUDO DAS FUNÇÕES

Como o presente trabalho trata-se do estudo de Funções Circulares, não poderíamos deixar de dar uma breve noção do conceito de função. Para tanto, pensaremos um pouco na ciência e em suas características que edificam o conhecimento humano.

O objetivo final da Ciência é a formação de um quadro ordenado e explicativo dos fenômenos naturais, fenômenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social. A ciência deve ser considerada, acima de tudo, como um instrumento forjado pelos homens, instrumento ativo de penetração no desconhecido.

A ciência, de modo geral, não tem como objetivo descrever a realidade como ela é. Seu propósito é construir quadros racionais de interpretação e previsão, cuja legitimidade dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação. A história da ciência está cheia de exemplos de renovação e substituição de quadros explicativos.

Nota-se que a realidade humana apresenta duas características:

- Interdependência – Todas as coisas estão relacionadas umas com as outras. É possível pensarmos em uma determinada área, que ao analisá-la, não desencadearmos a sua inter-relação com os outros “organismos”;
- Fluência – O mundo está em permanente evolução. Todos os seres vivos e mesmos os minerais estão a todo momento se transformando.

Se tudo depende de tudo, e de certa forma estabelecem entre si uma relação, como fazer para priorizar um estudo? Neste momento, convém isolarmos uma fração dessa totalidade para estudá-la de forma minuciosa. A esse conjunto, daremos o nome de isolado.

Dentro de cada isolado existem relações importantes que merecem destaque, como a noção de qualidade, quantidade e de lei.

Qualidade – Sejam A e B dois componentes de um isolado, entre eles existem relações de interdependência. Podemos notar dois sentidos: de A para B e outro de B para A , digamos que o primeiro tem antecedente em A e conseqüente em B e o segundo antecedente em B e conseqüente em A . Assim, utilizaremos a seguinte notação para estas relações $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$, respectivamente.

Definição 2.1: Sejam A, B, C, \dots, L componentes de um isolado, ao conjunto de todas as relações $A \rightarrow B, \dots, A \rightarrow L$ dá-se o nome de qualidades de A em relação a B, \dots, L .

Se os objetos A e B tem correspondência de tal forma que A tem qualidade em relação a B e B tem qualidade em relação a A , tal fato nos permite dizer que a relação entre A e B é simétrica.

As relações são orientadas, se os conseqüentes mudam, as relações também mudam. Exemplo: Para a árvore a folha desempenha o fundamental papel da respiração, já para um animal ela expressa a importante fonte de alimento. Deve-se sempre levar em consideração o contexto em que os componentes estão inseridos, pois apenas em um contexto é que as qualidades tem significado.

Quantidade – É importante estabelecer a noção de quantidade, pois em muitas vezes, ela é tida como sinônimo de número. Frequentemente, quantidade é aquilo que é objeto de medida. Exemplo: Pedro tem 20 balas, Manoel possui 15 e José apenas 10. Podemos dizer que Pedro tem mais que Manoel, que por vez, tem mais que José e, por conseqüência, dizemos que Pedro tem mais balas que José, neste exemplo, conseguimos medir a quantidade com números. Agora, digamos que Manoel é mais corajoso que José, que é mais corajoso que Pedro. Conseguimos, neste caso, estabelecer uma relação de quantidade de acordo com a qualidade, porém sem usar números.

Considere a quantidade como um atributo da qualidade e não como objeto, nem se quer exige-se que haja possibilidade de medir para falar de quantidade. A variação de quantidade é uma questão que depende, acima de tudo, do grau de conhecimento momentâneo, não é, de modo nenhum, uma questão que possa pôr-se em valor absoluto (numérico).

Lei – À evolução de um isolado, chama-se fenômeno natural. Essa evolução manifesta-se pela alteração das qualidades dos componentes do isolado. A evolução mostra que há certos fenômenos que apresentam regularidades, isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas.

A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a repetição e a previsão. Desse modo, lei natural é toda a regularidade e evolução de um isolado. Assim podemos destacar a lei de duas formas:

- **Lei Qualitativa** – aquela que diz respeito a variação de qualidade.
- **Lei Quantitativa** – aquela que diz respeito a variação de quantidade, no entanto, a lei põe em evidência o elo entre qualidade e quantidade, então, defini-se que uma Lei é uma dependência qualitativa-quantitativa.

2.4.1 Noção de Função e Variável

Suponhamos que uma pessoa queira ir de uma cidade A até a cidade B no menor tempo possível. Verificamos que existe uma lei quantitativa, que em momento algum pode se separar da qualitativa, pois embora a pessoa queira rapidez, ela também deve preservar a sua segurança.

Neste exemplo, o tempo (T) irá variar de acordo com o espaço (S) e a velocidade (V). Quanto maior a velocidade e menor o espaço, mais rápido será a viagem. Todavia, quanto menor ou maior for o espaço, mesmo que a velocidade seja conduzida de forma satisfatória, o tempo irá ser menor ou maior, respectivamente. E ainda, se o espaço for curto e a velocidade não for satisfatória, o tempo gasto poderá ser maior. Assim, dizemos que o tempo está em função do espaço e da velocidade.

Se quisermos estudar leis quantitativas, temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.

Para expressar a relação entre os conjuntos, criou-se instrumento que consiste na correspondência unívoca entre eles. Neste caso, é preciso arranjar uma representação simbólica para os conjuntos.

Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de variável, o que se faz da forma seguinte: Seja D um conjunto qualquer de números, finito ou infinito, representamos qualquer dos seus elementos por um símbolo. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto D , chamamos de variável.

Usualmente, trabalhamos com as letras do nosso alfabeto e as letras do alfabeto grego para representar as variáveis.

Uma variável é o que for determinada pelo conjunto numérico que ela representa – o seu domínio, como daqui em diante será chamado.

Domínio de uma função é, também, chamado **campo de definição** ou **campo de existência** da função, ou seja, é o conjunto de todos os valores possíveis da variável independente x .

2.4.2 Conceito de Função

Voltemos ao exemplo dado anteriormente. Se o tempo está em função do espaço e da velocidade, pode-se, então, estabelecer a seguinte relação matemática: $T = \frac{S}{V}$, onde T é a razão do espaço em relação a velocidade. Assim, o conceito de função aparece como instrumento próprio para o estudo das leis.

Definição 2.2: Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é a função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. A x chama-se variável independente, a y variável dependente.

Para indicar que y é a função de x , usaremos também escrever $y(x)$; para representar aquele valor b de y que corresponde a um valor particular a de x , escreve-se $b = f(a)$ ou $b = y(a)$, conforme se usou a representação $y = f(x)$ ou $y(x)$.

Como se estabelece a correspondência da variável independente para a dependente? Como se define a cada função particular $y(x)$?

Consiste este modo de definição em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor de a de x um valor de b de y .

Exemplo I:

Seja $y = 2x$, efetuando as operações no segundo membro, vemos que cada valor de x faz corresponder a um valor de y , de modo que se:

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \rightarrow y = 4$$

$$x = 3 \rightarrow y = 6$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x = a \rightarrow y = b.$$

Portanto, a expressão analítica do 2º membro $2x$ define uma função $y(x)$. O conceito de função não se confunde com o de expressão analítica (esta é apenas um modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis). A igualdade $y = 2x$, figura y igualado a uma expressão analítica em x , contém uma lei matemática ligando as duas variáveis. Essa lei

matemática define a correspondência que existe entre x e y e faz, portanto, que y seja função de x .

Ao trabalhar com função, devem-se observar bem os valores numéricos que a função pode assumir e também tentar prever que possível conjunto numérico essa aplicação pode nos dar, uma vez que em cada função temos uma lei que garante a existência de regularidades. Daí, necessita-se da seguinte definição:

Dada a função $f : A \rightarrow B$, o conjunto A chama-se domínio da função e o conjunto B , contradomínio da função. Para cada $x \in A$, $\exists y \in B$ e chama-se imagem de x pela função f ou o valor assumido pela função f para $x \in A$, o representamos por $f(x)$ ou $y = f(x)$.

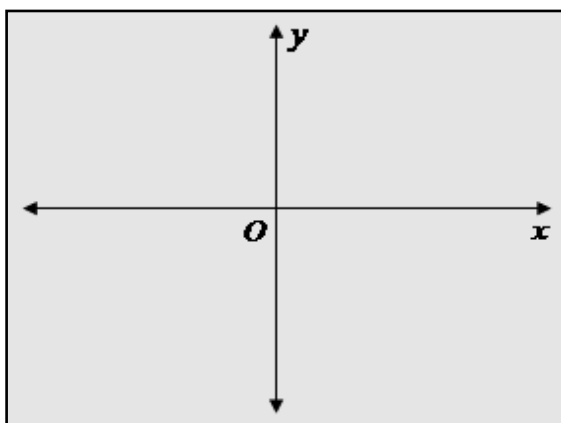
O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $\text{Im}(f)$.

2.4.2.1 O Sistema Cartesiano de Referência

Sejam no plano, duas retas concorrentes que, por comodidade, se tomam perpendiculares entre si no ponto O . Tomamos como referência a reta que está na horizontal, e a partir do ponto O , denominado origem, tomam-se dois sentidos: convencionalmente positivo, de O para a direita, e o outro negativo, de O para esquerda. A reta assim orientada chama-se eixo das abscissas.

A reta que está na vertical, a partir do mesmo ponto O , se tomam dois sentidos: convencionalmente positivo, de O para cima, e o outro negativo, de O para baixo. A reta assim orientada chama-se eixo das ordenadas.

Desta maneira, podemos tomar cada um dos eixos para cada uma das variáveis –



sobre o eixo Ox interpretamos geometricamente aquele conjunto de números reais, que é o domínio da variável x , e sobre o eixo Oy , aquele conjunto de números reais que é o domínio de y .

Figura 2.1: Sistema Cartesiano de Referência.

2.4.3 Tipos de Funções

2.4.3.1 Função Crescente e Decrescente

Dizemos que uma função $y = f(x)$, de A em B , é crescente em um intervalo $[a, b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a um intervalo $[a, b]$ temos:

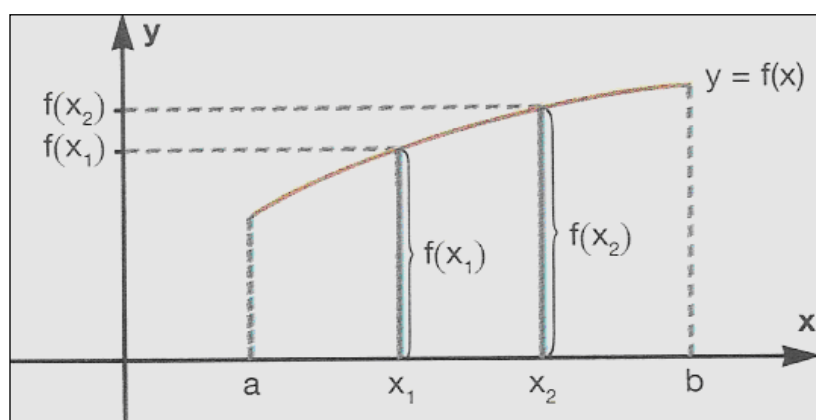
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$


Figura 2.2: Gráfico de uma função crescente.

Dizemos que uma função $y = f(x)$, de A em B , é decrescente em um intervalo $[a, b] \subset A$ se, e somente se, para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a um intervalo $[a, b]$ temos:

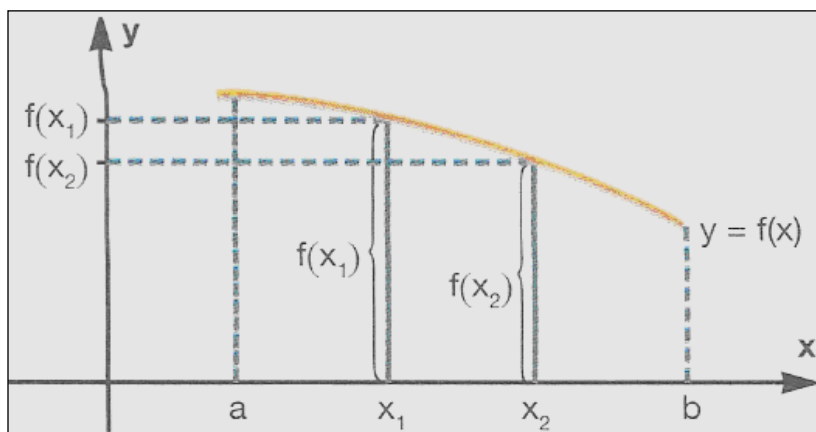
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$


Figura 2.3: Gráfico de uma função decrescente.

2.4.3.2 Função Par e Ímpar

Uma função $f : A \rightarrow B$ é par se, para qualquer $x \in A$, $f(x) = f(-x)$. Graficamente as funções pares são simétricas em relação ao eixo das ordenadas.

Exemplo: $f(x) = x^2$. Agora aplicando a $f(-x)$ temos:

$f(-x) = (-x)^2 \Rightarrow f(-x) = x^2$. Logo $f(x) = f(-x) \rightarrow f$ é par.

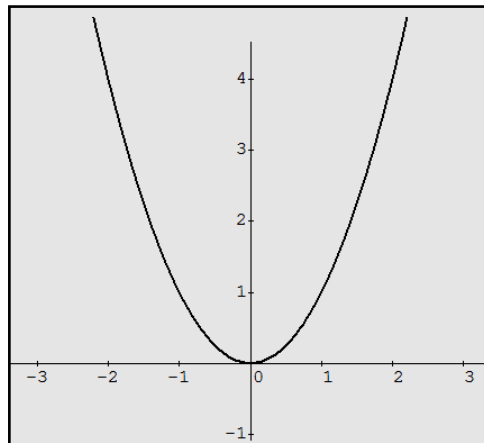


Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = x^2$ (função par).

Uma função $f : A \rightarrow B$ é ímpar se, para qualquer $x \in A$, onde $f(-x) = -f(x)$. Graficamente as funções ímpares são simétricas em relação à origem $(0, 0)$ do sistema de eixos cartesianos.

Exemplo: $f(x) = x$. Agora aplicando a $f(-x)$ temos:

$f(-x) = -x \Rightarrow f(-x) = -f(x)$. Logo, f é ímpar.

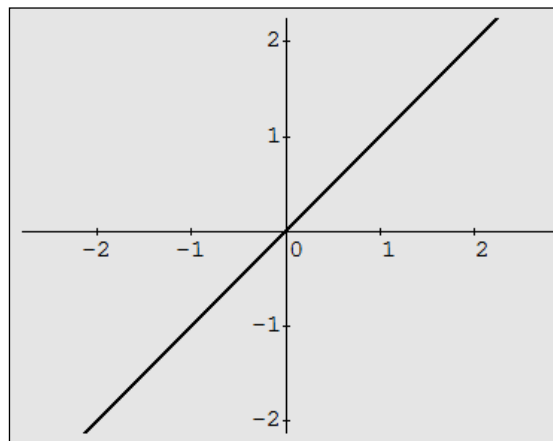


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = x$ (função ímpar).

2.4.3.3 Função Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Uma função $f: A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, dois elementos distintos quaisquer do domínio de f possuem imagens distintas em B . Assim, f é injetiva quando:

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B \text{ ou } f(x_1) = f(x_2) \text{ em } B \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ em } A.$$

Uma função $f: A \rightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, o seu conjunto imagem for igual ao contradomínio: $\text{Im}(f) = B$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é bijetora se, e somente se, ela for, simultaneamente injetora e sobrejetora. Quando isso ocorre dizemos que há uma bijeção ou uma correspondência biunívoca entre A e B .

2.4.3.3.1 Reconhecimento Através do Gráfico

Pela representação cartesiana de função f podemos verificar se f é injetora, sobrejetora ou bijetora. Para isso, basta analisarmos o número de pontos de interseção das retas paralelas ao eixo dos x , conduzidas por cada ponto $(0, y)$ em que $y \in B$ (contradomínio de f).

1º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico, então, a função é injetora. Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$

b) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2$

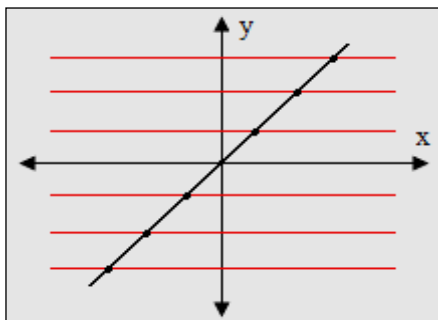


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = x$ (injetora).

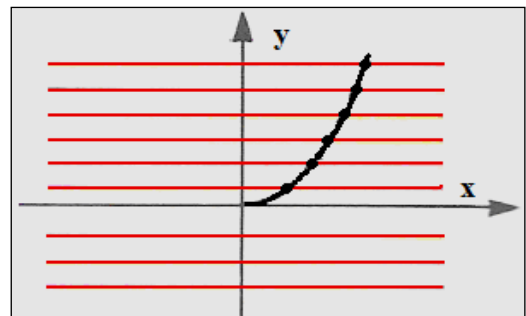


Figura 2.7: Gráfico da função $f(x) = x^2$, $f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (injetora).

2º) Se cada uma das retas cortar o gráfico em um ou mais pontos, então, a função é sobrejetora.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x - 1$$

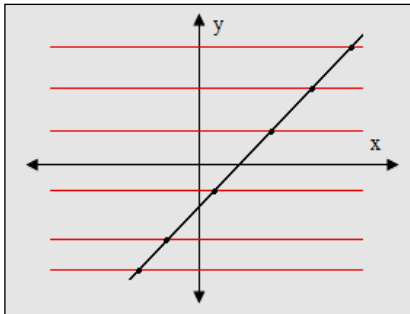


Figura 2.8: Função $f(x) = x - 1$ (sobrejetora).

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(x) = x^2$$

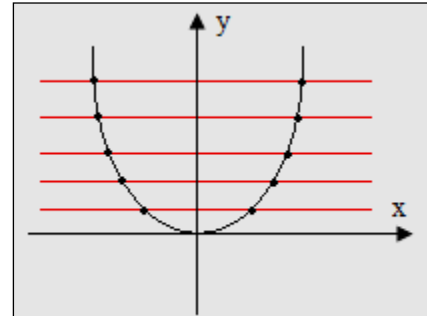


Figura 2.9: Função $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (sobrejetora).

3º) Se cada uma dessas retas cortar o gráfico em um só ponto, então, a função é bijetora.

Exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

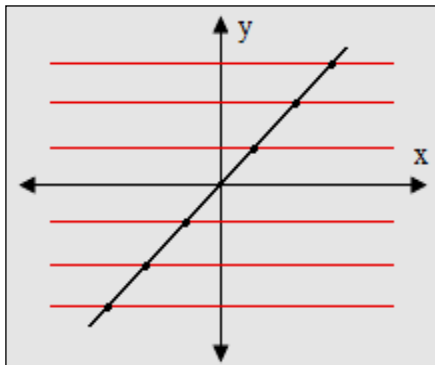


Figura 2.10: Função $f(x) = 2x$ (bijetora).

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x \cdot |x|$$

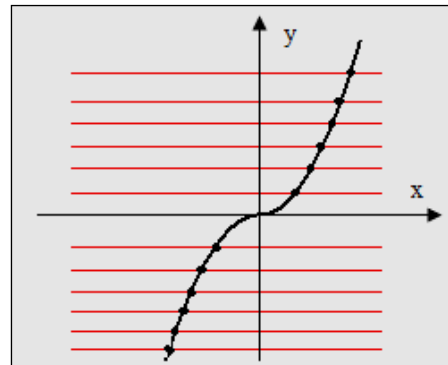


Figura 2.11: Função $f(x) = x \cdot |x|$ (bijetora).

Em resumo:

Dada a função $f: A \rightarrow B$, consideram-se as retas horizontais por $(0, y)$ com $y \in B$:

1º) Se nenhuma reta corta o gráfico mais de uma vez, então, f é injetora.

2º) Se toda reta corta o gráfico, então, f é sobrejetora.

3º) Se toda reta corta o gráfico em um só ponto, então, f é bijetora.

2.4.3.4 Função Periódica

Uma função real f , com domínio em A , onde A é subconjunto da reta real, é dita periódica se, existe um número real positivo T , tal que para todo x em A , vale: $f(x + T) = f(x)$. Desse modo, podem existir muitos números reais T com esta propriedade, mas o menor número positivo T , que satisfaz a esta condição recebe o nome de período fundamental.

3 A TRIGONOMETRIA DO PONTO DE VISTA HISTÓRICO E ESCOLAR

O ensino da matemática é, mundialmente, uma preocupação daqueles que a ensinam. Muitos dos estudos apontam uma perspectiva negativa no ensino dessa disciplina. Muito se tem feito na busca por estratégias de novas metodologias de ensino, para melhorar a qualidade de ensino. O ensino de matemática, baseado em atividades, pressupõe a aprendizagem como uma construção constante das noções matemáticas a partir da experimentação, discussão posterior dos resultados obtidos e elaboração final dos conceitos em construção.

Em Educação Matemática, é muito importante o estudo histórico da construção de um conceito de um determinado conteúdo, pois os erros e dificuldades superados pelos matemáticos podem servir de estímulo ao aluno, além de fazer com que compreendamos melhor as dificuldades apresentadas pelos mesmos. Aumentando o conhecimento do aluno no campo histórico, pode-se além de enriquecer nossas aulas, ampliar a visão do aluno a respeito do conteúdo, contribuindo assim para uma formação de qualidade.

Pensar em história da matemática, leva-nos a refletir sobre fatos e acontecimentos ocorridos na evolução da história do homem e de sua sociedade, que através dos séculos transmitiu tais conhecimentos por meio da tradição oral e/ou mediante a documentos em forma de escrita.

A matemática é considerada como um fragmento dos saberes contidos no aglomerado de informações do arcabouço cultural da humanidade que ao longo do tempo adquiriu o valor estético de ciência. Diante desse fato, é possível admitirmos que o processo de construção desse aglomerado cultural perpassa uma relação estreita entre a matemática que hoje temos ou fazemos e o seu desenvolvimento histórico. Todavia, é necessário compreendermos qual a utilidade da história para a matemática. (MENDES, 2000, p. 1)

A ligação da matemática com sua própria história é um forte argumento para a explicação de vários “porquês” matemáticos. Valer-se da história da matemática, pode ajudar a dinamizar a demonstração de teoremas e propriedades matemáticas.

A história da matemática vem se tornando, atualmente, um forte aliado metodológico em seu ensino. Buscar respaldo na história, nas descobertas e revoluções e incorporá-las ao ensino da matemática conduz o aluno a construir a matemática como um conjunto de idéias e informações úteis ao seu cotidiano, facilitando tanto a sua compreensão quanto a sua aplicação.

Procurando verificar as concepções, atitudes e experiências dos professores de Matemática com relação ao uso da história em sala de aula, detectou-se que os professores investigados apontam para a necessidade de um aprofundamento acerca do conteúdo histórico de alguns tópicos matemáticos como a trigonometria, justificando ser possível e necessária a utilização do mesmo durante as suas atividades de ensino. (MENDES e FOSSA, apud, MENDES, p. 2)

Muitos estudiosos dedicados a educação matemática, consideram importante dedicar parte do ensino de um conteúdo a sua história. Tal processo permite que o aluno possa identificar com maior clareza a aplicação desse conteúdo e também a necessidade que possibilitou o início de seu estudo.

A trigonometria desenvolveu-se a partir das necessidades existentes nos estudos de astronomia, navegação e agrimensura, que interagindo com as teorias matemáticas já existentes, puderam ser aplicadas aos problemas práticos evidenciados em tais atividades. Porém, somente a partir do século XIII, é que a astronomia foi considerada diferente da Trigonometria, quando iniciou-se uma interação dela com a análise numérica e geometria, além dos aspectos algébricos, que só foram introduzidos por volta do século XVI. A trigonometria ganha ênfase, quando se desvincula da astronomia, ganhando importância como um conhecimento da matemática, desligando-se de sua origem histórica e ganhando vida própria, oportunizando assim, a realização de variadas aplicações inesperadas nos diversos campos do conhecimento. A descoberta marcante diz respeito a percepção de Euler, com relação a utilização da Trigonometria na apresentação das funções complexas, o que novamente mostra o desenvolvimento e a inter-relação de idéias aparentemente distintas e que convergiram na construção de um tópico matemático, organizado a partir da aplicação da trigonometria.

3.1 A ORIGEM DA TRIGONOMETRIA

Os fenômenos naturais, desde a antiguidade, despertaram a curiosidade e interesse de vários homens. Diante da observação constante desses fenômenos, o homem começou a utilizar-se da relação noite-dia, claro-escuro, sol-lua e outras formas que descreveremos aqui. Desta forma, acredita-se que este tenha sido o primeiro indício de contagem, ou seja, a primeira matemática, obviamente de forma muito primitiva, surgiu das observações que

descrevemos acima. Assim, tinham-se as seguintes relações de contagem: caminhei tantos dias ou noites, daqui a quantas luas cheias, etc...

Após anos de observações constantes das estrelas, da lua e do sol e registrando as posições relativas destes astros, pôde-se observar que certos fenômenos climáticos (o que nós conhecemos hoje como estação da chuva e seca, primavera, verão, outono e inverno) eram fenômenos cíclicos. De maneira que tais conhecimentos, de início foram grandemente utilizados na agricultura. Logo, o interesse pelo estudo desses astros criou uma legião de estudiosos na antiguidade, que foram chamados de astrônomos, surgindo assim a famosa Astronomia.

Nos estudos de astronomia, desenvolveu-se uma matemática, não como uma ciência, mas sim, como ferramenta de auxílio para a Astronomia. Pois era impossível trabalhar com as fases da lua sem utilizar triângulos, medidas e outros recursos matemáticos.

A palavra trigonometria significa: “tri” = três, “gono” = ângulo e “metria” = medida e refere-se a “resolução de triângulos”. E não se sabe ao certo, se o conceito de ângulo surgiu com os gregos, ou se eles em contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagésimais.

A trigonometria nessa época foi desenvolvida na esfera, acredita-se que isso se deve ao fato dos astros observados serem esféricos. A trigonometria esférica, como é conhecida, não é tratada pelo sistema de ensino, sua utilização está relacionada aos estudos de “Astronomia, Geodésia (ciência que trata da forma e das dimensões da Terra), a Navegação Oceânica, Navegação Aérea, Mecânica de Satélites, Transmissão de Rádio de Grande Alcance, Cálculo da trajetória de mísseis” (LINDEGGER, 2000, p. 42) e outras aplicações.

Os primeiros estudos de trigonometria de que temos notícia, surgiram no Egito e na Babilônia. Parece ter havido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônicos a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes.

No Egito, isto pode ser observado no papiro de **Ahmes**, mais conhecido como **Papiro de Rhind**, que data de aproximadamente 1650 a.C., e contém 84 problemas, dos quais 4 fazem menção ao **seqt** de um ângulo. Ahmes não foi claro ao expressar o significado desta palavra, mas pelo contexto, acredita-se que **seqt** seja a cotangente do ângulo **OMV**. Veja as figuras 3.1 e 3.2:



Figura 3.1: Papiro de Rhind.

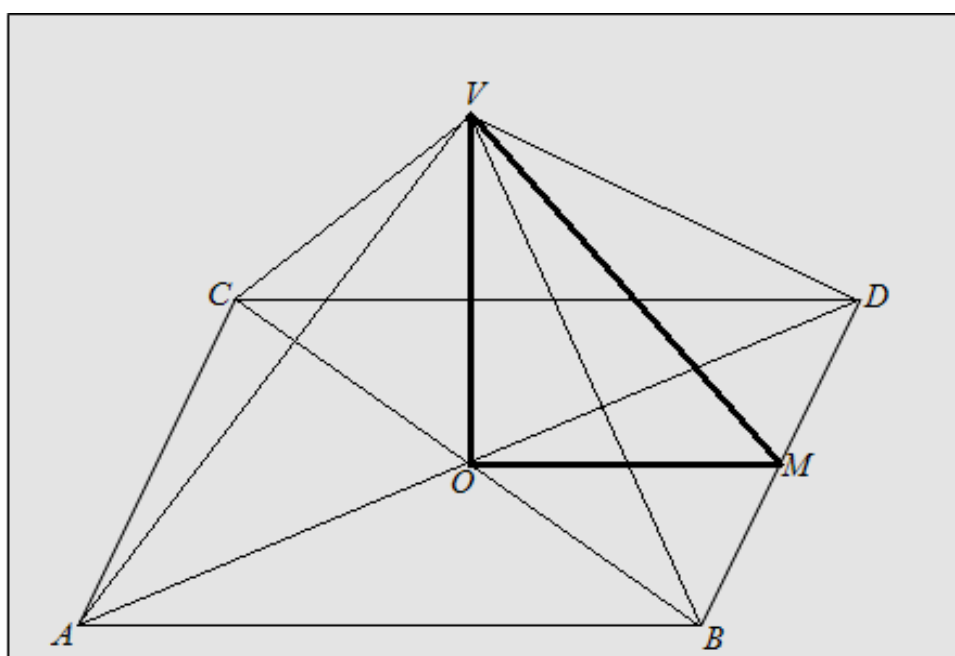


Figura 3.2: O *seqt* egípcio.

Exemplo:

Seja $\overline{OV} = 40$ e $\overline{OM} = 80$, então o *seqt* $= \frac{80}{40}$, isto é *seqt* $= 2$.

Os egípcios utilizavam o *seqt* para manter uma inclinação constante das faces das pirâmides, isto é, a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical.

Os babilônicos tinham grande interesse pela astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. No XXVIII a.C., eles construíram um calendário astrológico e elaboraram, a partir de 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares. Fazendo uma analogia com a trigonometria e a geometria, é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem trabalhar com triângulos. Foram os babilônicos que escolheram o sistema sexagesimal, dividindo o círculo em seis partes iguais, o que anos mais tarde, influenciou os estudos do astrônomo grego Hiparco de Nicéia (180 – 125 a.C.). É atribuído ainda aos babilônicos, a divisão do círculo em 360 partes iguais.

3.1.1 Os Gregos e a Trigonometria

Na tentativa de resolver o problema da navegação, os gregos se interessaram pelo estudo da astronomia, desta maneira, ao estudar os astros puderam resolver o tão importante problema da navegação em alto mar, sem terra à vista. Assim, a trigonometria mais uma vez passa a assumir grande destaque nos estudos de grandes pensadores da época.

Podemos dizer que os gregos foram grandes conhecedores da Geometria, ao qual a trigonometria está intimamente ligada. Neste campo, a Grécia produziu célebres pensadores, dentre eles, podemos destacar: “Tales de Mileto (625 – 546 a.C.) com seus estudos de semelhança, que embasam a trigonometria e seu discípulo Pitágoras (570 – 495 a.C.).” (COSTA, 1997, p. 5). Pitágoras é aquele a quem se atribui a demonstração do teorema que leva o seu nome: “O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados sobre os catetos.” (LINDEGGER, 2000, p. 44).

Foi Tales de Mileto, em uma visita ao Egito, quem mediu a altura da pirâmide de Quéops, associando noções de triângulos semelhantes e de que a soma interna dos ângulos de um triângulo é 180° .

Considerando a semelhança entre dois triângulos, os lados correspondentes estão, entre si, na mesma razão. Atualmente, este assunto é tratado em livros do 9º Ano como Teorema de Tales, enunciado da seguinte maneira: Um feixe de retas paralelas determina

sobre duas transversais segmentos proporcionais. Veja na figura 3.3 abaixo uma representação de como Tales realizou seus cálculos.

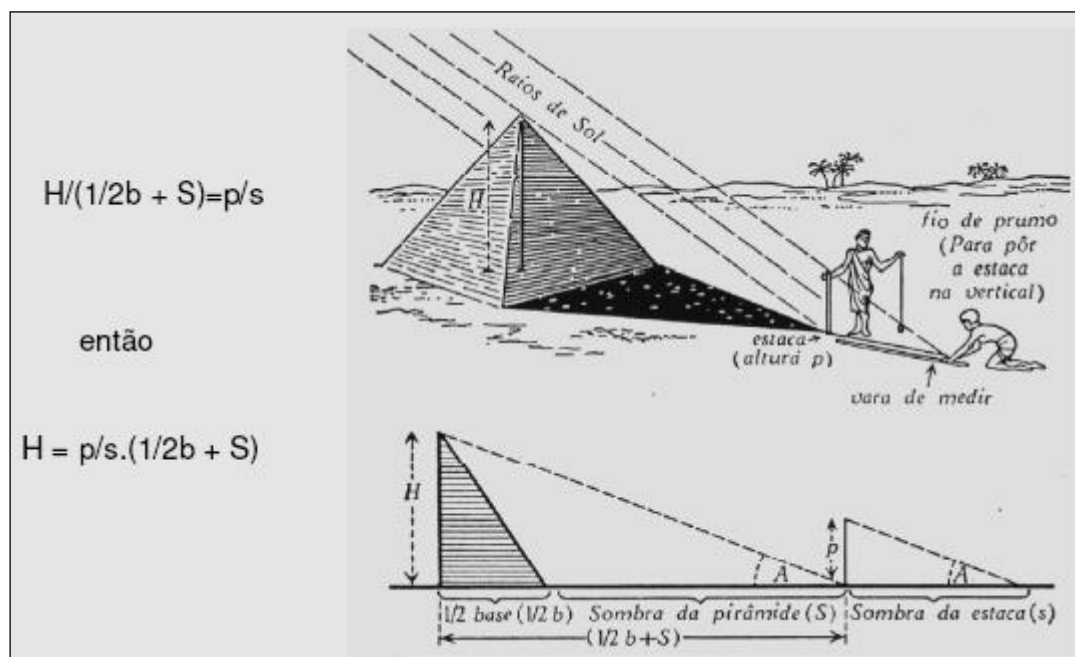


Figura 3.3: Como Tales mediu a altura da pirâmide Quéops.

FONTE: (HOGEN, apud, LINDEGGER, 1997, p. 45).

Anos mais tarde, tivemos os primeiros sinais de aparecimento do que seria hoje as funções seno e cosseno, é evidente que nesta época essas duas relações ainda não eram conhecidas por estes nomes.

A Escola Pitagórica, fundada no século V a.C., foi a responsável por descobertas na acústica, elaborando uma lei de intervalos musicais. (...) Podemos tomar a lei dos intervalos musicais como um prenúncio do aparecimento das funções seno e cosseno no osciloscópio do futuro, para estudar o som. (BELL, apud, COSTA, 1997, p. 5).

O primeiro registro grego de estudo relacionados a trigonometria surgiu com Hipsícles (segunda metade do século II a.C.). Hipsícles teria dividido o zodíaco em 360 partes, ao fazer isso, ele considerou um dia completo dividido em 360 partes, tal fato foi fortemente influenciado pela cultura babilônica.

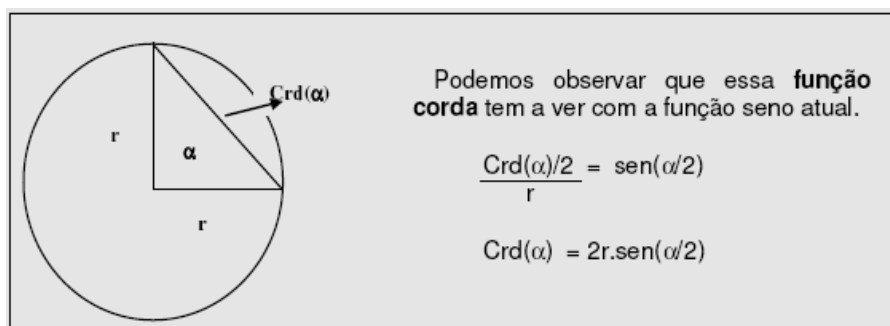


Figura 3.4: Relacionando o comprimento da corda com a razão (função) seno atual.

O grego Hiparco de Nicéia é considerado o maior astrônomo da antiguidade e foi para realizar seus estudos, acerca da astronomia, que ele estudou fortemente a trigonometria, chegando a resultados fabulosos para a sua época. Hiparco introduziu uma única função (razão) trigonométrica, a função corda que podemos representar por **Crd**. Se considerarmos a figura 3.4 acima, podemos observar que a função **Crd**, corresponde a função seno.

Para construir sua “tábua de cordas”, Hiparco associou a cada corda de um arco, o ângulo central correspondente, e constituiu o que consideramos a primeira tabela trigonométrica, com ângulos variando de 0° a 180° , em cuja montagem utilizou interpolação linear (aqui ele considerou a divisão do círculo em 360 partes, o que encorajou o uso constante dessa representação por futuros estudiosos). Esta tabela foi um grande avanço para a astronomia. Ele denominou, ainda, o **arco de 1°** , cada parte a que a circunferência ficou dividida e cada **1°** foi subdividido em outras 60 partes, obtendo assim, o ângulo de 1 minuto. Daí, se explica melhor a utilização do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônicos. Por tantas contribuições a trigonometria, Hiparco é considerado o “Pai da Trigonometria”.

A obra de Hiparco influenciaria, três séculos depois, o grande matemático Klaudius Ptolemaios (Cláudio Ptolomeu). Segundo COSTA (1997, p. 7), Ptolomeu teria estudado com muito afinco as obras de Hiparco e de outros estudiosos gregos, que o antecederam. Desta forma, ele escreveu o que na antiguidade foi considerada a maior e mais completa obra sobre trigonometria a “*Syntaxis Mathematica*” (Síntese Matemática), uma coleção composta por treze volumes, que ficou conhecido como **Almagesto**. A obra de Ptolomeu recebeu este nome porque em árabe “**Al magest**” significa “a maior”.

Dos treze livros que compõem o Almagesto, apenas o primeiro, contém as informações básicas matemáticas necessárias para a investigação dos fenômenos celestes. Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos dez e onze, ao qual ele dedicou o décimo a explicação de como a tabela pode ser calculada e ao décimo primeiro, a própria tabela de cordas. Esta tabela continha o cálculo dos ângulos de meio em meio grau, de 0° a 180° , o raio foi dividido em 60 partes chamadas “partes minutae primae” e cada uma dessas últimas, por sua vez, foi novamente dividida em 60 partes chamadas “partes minutae secundae”. Daí o uso dos termos “minuto” e “segundo”.

Na verdade, não existe no **Almagesto** nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, todavia entendemos que conhecer a história da trigonometria, desde o seu início, deve ser um fator integrante, além de fundamental para a compreensão de conceitos futuros.

Deste modo, fica claro que o Almagesto tornou evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais pela matemática.

Para não perdermos o foco de nosso estudo, voltemos nossa atenção para o estudo da origem das funções trigonométricas. Para tanto, observamos que o conceito de função não foi desenvolvido na Grécia Antiga, apesar de nos estudos de Aristóteles aparecerem idéias sobre quantidades variáveis. A matemática nessa época não estabeleceu a noção geral de quantidade variável ou de função, uma vez que na astronomia, o objetivo era representar tabelas, relações entre conjuntos discretos de quantidades dadas, mas sem a preocupação de generalização.

Assim, o Almagesto perdurou como modelo de Astronomia até Nicolau Copérnico (1473 – 1543) e Johann Kepler (1571 – 1630), que introduziram a teoria heliocêntrica do sistema solar.

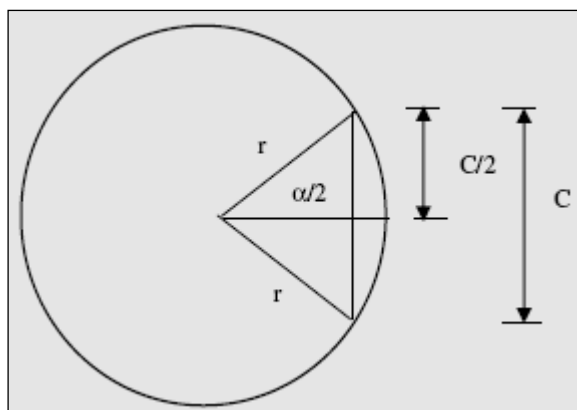
3.1.2 A Participação dos Hindus na Trigonometria

Com as invasões bárbaras e a conseqüente queda do Império Romano, no século IV d.C., a Europa Ocidental entrou em crise e o caminho para as “índias” tornou-se comum, surgindo um novo centro cultural. Na Índia, a trigonometria sofreu o que podemos chamar de uma grande revolução.

O legado hindu para a trigonometria está na obra “**Surya Siddhanta**” (Sistema do Sol), novamente temos aí a trigonometria relacionada à astronomia. No entanto, **Surya**, não seguiu o mesmo caminho de Klaudius Ptolemeios, que relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes, deste modo, quando se fazia as aplicações da “função” corda era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Assim o **Surya** de forma simples e conveniente, deu uma nova visão a essa relação, pois seria bem melhor ter uma tábua onde o arco fosse a própria variável independente. Logo a relação usada por eles era a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, que os hindus chamaram de “**jiva**”. Isto permitiu a visualização de um triângulo retângulo na circunferência. Daí nasceu o que podemos, em termos modernos, chamar de **função seno**.

Os hindus definiram o “**jiva**” como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

Observando a figura 3.5 a seguir, ela nos mostra com clareza o que estamos falando.



$$\text{Assim, } jiva = \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{O que para nós significa: } sen \frac{\alpha}{2} = \frac{c/2}{r}$$

$$\Rightarrow sen \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{2r} \Rightarrow sen \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2r} \cdot crd \alpha .$$

Figura 3.5: O jiva Hindu.

A trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, que era mais geométrica. Com essas mudanças introduzidas (inclusive quanto ao comprimento do raio considerado), as tabelas de Ptolomeu foram refeitas, utilizando métodos de tabulação. Logo com os hindus, as principais “funções” trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram.

Quando os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de “seno”, demonstraram algumas identidades, o que pode ser comprovado em **Varahamihira** (não sabemos se Varahamihira é o nome de uma obra ou se é o próprio autor), no ano de 505 d.C., o equivalente a $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$. É válido lembrar que Klaudius Ptolemaios também já havia realizado essa mesma demonstração.

3.1.3 A Contribuição dos Árabes e Persas

Entre os séculos VIII e XI, o mundo Mulçumano viveu um extraordinário avanço nas artes e nas ciências. Todavia, focaremos a nossa atenção para o século IX de nossa era.

Foi com a fundação da Escola de Bagdad que os árabes tornaram-se expressivos no campo matemático. Dessa época, podemos destacar a influência do príncipe da Síria **Mohamed-ben-Geber** (850 – 929 d.C.). O príncipe ficou conhecido como **Al Battani**, ou **Albategnius**, e ainda como **Ptolomeu de Bagdad**. Seus estudos estão entre o *Almagesto* e *Siddhanta*. E foi Al Battani que introduziu o círculo de raio unitário, o que permitiu demonstrar que a razão **jiva** (hindus) é válida para qualquer triângulo retângulo, independente do valor da medida da hipotenusa.

Veja a figura 3.6 a seguir:

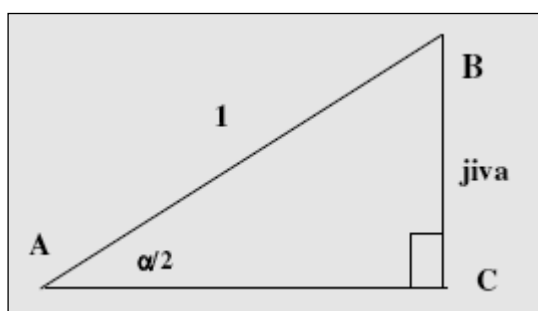


Figura 3.6: Raio unitário de Al Battani.

$$Jiva = \frac{\text{cateto oposto}}{1} = \frac{\overline{BC}}{1}$$

$$\text{e } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BC}}{1}.$$

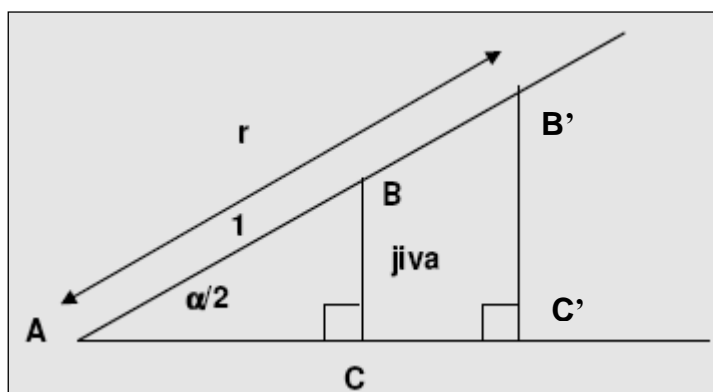


Figura 3.7: Figura usada para construir a Tabela de Al Battani.

temos: $\frac{jiva}{1} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$, logo, $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} = \frac{jiva}{1}$.

Com esta fórmula, pode-se calcular uma tábua de $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ a 90° , variando de $\frac{1}{4}$ em

$\frac{1}{4}$ de graus, ou seja, uma tabela de senos, apesar dessa notação ainda não ser utilizada. O interesse de Al Battani era calcular a altitude do sol, para isso, era necessário usar razões trigonométricas e construir tábuas mais precisas que as existentes.

Ainda no século IX, o matemático árabe **Abû'l Wêfa** começou a organizar e sistematizar provas e teoremas relacionados a trigonometria.

Se um triângulo retângulo tem um

ângulo agudo $\frac{\alpha}{2}$ então, quaisquer

que sejam as medidas do cateto oposto e da hipotenusa, podemos

afirmar que: $\Delta ABC \cong \Delta$

$AB'C'$. No ΔABC $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} =$

$\frac{jiva}{1}$. Pelo Teorema de Tales,

Entre os Persas, destacamos apenas **Nasîr ed-dên al-Tûsî**, que no século XII, escreveu uma obra na qual a trigonometria plana era considerada uma ciência desvinculada da astronomia.

3.1.4 Europa: da Herança dos Hindus e Árabes, à Trigonometria Incorporada a Análise Matemática

Com o declínio da Escola de Bagdad, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa. Nesse período (século XII), tivemos grandes estudiosos que fizeram a tradução de várias obras árabes e gregas, possibilitando assim, o acesso dos europeus a estes conhecimentos. Podemos destacar Gerardo Cremona (1114 – 1187), que traduziu mais de 85 obras. Entre outros tradutores, estão Platão de Tivoli, Adelardo de Bath e Robert de Chester.

Alguns matemáticos atribuem a Gerardo de Cremona e outros a Robert de Chester, o uso da palavra **seno** para o termo **meia-corda**. Todavia, todos concordam que o uso do termo **seno** se trata de um fato relativo a tradução. Para os hindus a palavra **meia-corda** era designada pelo termo **jiva**. Em contato com a cultura hindu, os árabes acabaram grafando a palavra **jiva** como **jiba**, uma vez que na pronúncia árabe **v** e **b** se confundem como labiais oclusivas. Em árabe, é freqüente escrever apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor, a colocação das vogais, com isso a palavra **jiba** derivou para o termo **jaib**. Além de **jiba** e **jaib** terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum, pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito. Jaib em árabe significa baía ou enseada.

Assim, foi natural que os tradutores do árabe para o latim e que desconheciam o sânscrito, traduzissem jaib como **sinus**, correspondente a baía ou enseada, o que deu origem ao nosso seno. Em particular, foi o matemático **Fibonacci** (1170 – 1250) que encorajou o uso universal do **seno**, ele utilizou o termo **sinus rectus arcus** em uma de suas obras.

A palavra cosseno surgiu somente no século XVIII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de **seno** e **cosseno** foram originados pelos

problemas relativos à astronomia, enquanto que o conceito de **tangente** surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

Na Europa, desde o século XI, paralelamente ao desenvolvimento da trigonometria, vinha ocorrendo o desenvolvimento das funções. Neste campo surgiu Nicole Oresme (1323 – 1382), no qual introduziu a representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre as variáveis. Seu trabalho influenciou Galileu (1564 – 1642) e Descartes (1596 – 1650). Com os estudos de Oresme, começou a se consolidar o conceito de função.

Na trigonometria, as funções foram definidas como funções do ângulo, em vez de funções do arco, e subentendidas como razões, pela primeira vez, no “**Cânon Doctrinae Ttriangulorum**” de Joachim Rheticus em Leipzig, 1551. Rheticus (1514 – 1576) elaborou uma tábua trigonométrica com maior rigor nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, cossenos, tangentes e secantes foram calculados de minuto em minuto. Ele foi o primeiro a adotar a organização das tábuas em semiquadrantes, dando os valores dos senos, cossenos e tangentes de ângulos até 45° e deve-se também a Rheticus a introdução das secantes na trigonometria européia e os cálculos do $\operatorname{sen} n\alpha$ em termos de $\operatorname{sen} \alpha$.

Em 1580, tivemos a célebre contribuição de Viète (1540 – 1603), pois foi ele quem adicionou um tratamento analítico à trigonometria. Este fato contribuiu muito para os estudos posteriores de Euler em relação às funções periódicas no século XVIII.

Sir Isaac Newton (1622 – 1678) paralelamente aos seus estudos de cálculo infinitesimal, apoiados na geometria do movimento, trabalhou com séries infinitas, tendo expandido $\operatorname{arcosen} x$ em séries e, por reversão, deduzido a série para $\operatorname{sen} x$. Além disso, comunicou a Leibniz a fórmula geral para $\operatorname{sen} (nx)$ e $\cos (nx)$ tendo, com isso, aberto a perspectiva para o $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ surgirem como números e não como grandezas, sendo Kastner, em 1759, o primeiro matemático a definir as funções trigonométricas de números puros. Vale mencionar que Thomas-Fanten de Lagny foi o primeiro matemático a evidenciar a **periodicidade** das funções trigonométricas, em 1724.

A ênfase da trigonometria começou a passar da solução de triângulos para a investigação de relações funcionais, revelou-se mais útil e ampla do que inicialmente se imaginava e desempenha uma posição de grande importância em áreas como Cálculo e Análise Matemática.

A trigonometria toma a sua forma atual quando Euler (1707 – 1783) adota a medida do raio de um círculo, como unidade, e define funções aplicadas a um número e não

mais a um ângulo, como era feito até então, em 1748. A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI e teve novo impulso com o aparecimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com a figura de Euler.

Uma idéia genial de Euler foi criar a função E , que denominamos função de Euler. Ela associa a cada número um ponto de um círculo C_1 unitário e centrado na origem do plano cartesiano. Seu domínio é o conjunto \mathbb{R} ¹ e o contra domínio é C_1 . A função $E: \mathbb{R} \rightarrow C_1$ associa a cada $x \in \mathbb{R}$, um ponto $P \in C_1$, $P = (a, b)$ pertence a C_1 se, e somente se, $a^2 + b^2 = 1$.

Como essa função faz correspondência entre cada número x e os pontos do círculo C_1 , ao número zero corresponde o ponto $A = (1, 0)$ e, dado $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mede-se, a partir desse ponto A , um arco de comprimento x , no sentido anti-horário. A extremidade do arco é um ponto $P = E(x)$. Se $x < 0$, mede-se, a partir de A , um arco de comprimento x , no sentido horário, e se obtém o ponto $P = E(x)$ correspondente. A função $E: \mathbb{R} \rightarrow C_1$ consiste em envolver a reta \mathbb{R} como se fosse um fio inextensível sobre o círculo C_1 que, por sua vez, é imaginado como um carretel.

Definindo-se as funções: $h_1: C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_1(P(a, b)) = a$ e $h_2: C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_2(P(a, b)) = b$, e tomando-se as compostas: $f = h_1 \circ E$ e $g = h_2 \circ E$, podem-se definir as funções seno e cosseno de um número real x e não mais de um **ângulo**, como era anteriormente necessário.

Dado $x \in \mathbb{R}$, a ele se associa um ponto P , do círculo, sendo: $P = E(x) = (a, b)$. Considerando $a = \cos x$ e $b = \sin x$ definimos: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, assim $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, respectivamente. Sendo $\cos x$ a abscissa e $\sin x$ a ordenada de $p = E(x)$.

Veja a figura 3.8:

¹ Na época o conjunto dos números reais não estava ainda bem definido (isto só ocorreu no século XIX), porém, neste texto, estamos dando uma interpretação moderna do trabalho de Euler.

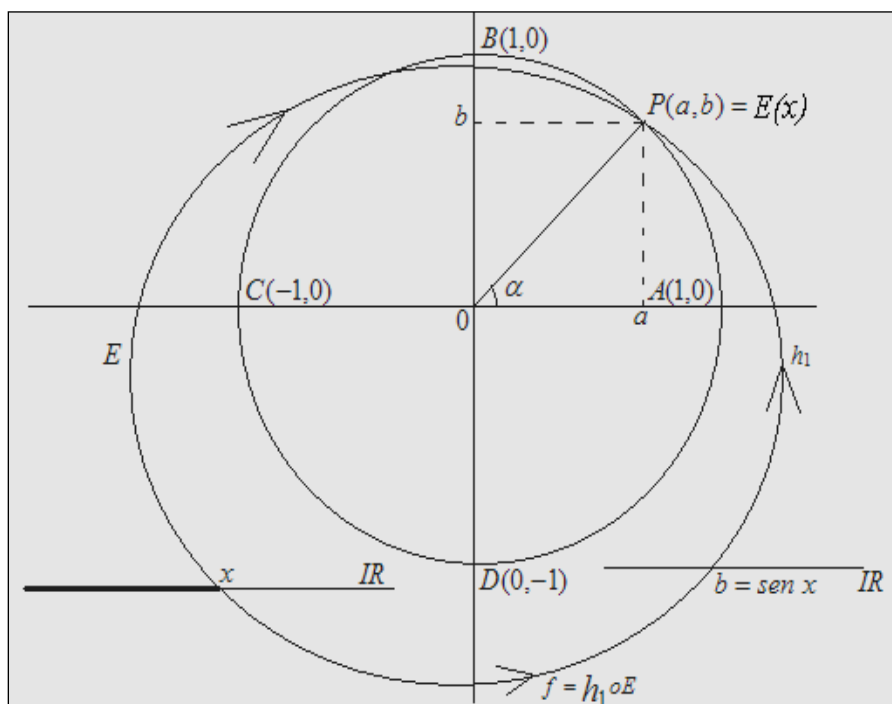


Figura 3.8: Associação entre um número Real e seu seno através do ponto correspondente no ciclo.

FONTE: (COSTA, 1997, p. 16).

“A Função de Euler $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_I$ que possibilitou encontrar $\sin x$ e $\cos x$, como função de uma variável real x , abriu para a trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas.” (LIMA, apud, COSTA, p. 17).

O tratamento analítico das funções trigonométricas está no livro “*Introductio in Analysin Infinitorum*”, de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário, ou número definido pela série: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$. E ele mostrou que: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$ onde i é a unidade imaginária, possibilitando definir as funções seno e cosseno a partir dessas relações, inserindo-as no campo dos números complexos.

Enfim, a trigonometria, no início uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma e por fim transformou-se em uma parte da Análise Matemática, expressando relações entre números complexos, sem necessidade de recorrer a arco ou ângulo.

Como o nosso objetivo é desenvolver um relato histórico em relação as funções circulares, acreditamos poder, neste momento, interromper nosso estudo histórico.

3.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Reconhecemos que, de maneira geral, o livro didático constitui um elemento importante para o professor, quanto à formação de sua estratégia de abordagem de um conteúdo programático.

Dessa forma, consideramos importante observar a proposta de abordagem das Funções Circulares na escola, analisando alguns livros didáticos. Seleccionamos sete livros que são alguns dos comumente adotados por professores, pois, estes são livros recomendados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) e que são adotados pelas escolas públicas. É válido ressaltar, que alguns destes livros foram utilizados por escolas na década de 90.

Os livros analisados foram:

- 1- BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Cláudio Xavier. **Matemática Aula por Aula**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2003.
- 2- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. 1ºed. São Paulo: Ática, 2004.
- 3- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr., José Ruy. **Matemática Fundamental**. São Paulo: FTD, 1994.
- 4- GOULART, Márcia Cintra. **Matemática no Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 1999.
- 5- KIYUKAWA, Rokusaburo; SHIGEKIYO, Carlos Tadashi; YAMAMOTO, Kasuhito. **Os Elos da Matemática**. 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 1991.
- 6- PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1ºed. São Paulo: Moderna, 2004.
- 7- SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Ática, 1998.

Todos os livros analisados abordam, em seu conteúdo, as funções circulares. Um dos elementos, que julgamos de imediato observar é a importância dada ao assunto, analisada

pelo número de páginas dedicadas ao tema. Ao nosso entender, esse número revela a ênfase dada pelo autor ao desenvolvimento de tal assunto.

Obtivemos os dados registrados no quadro:

Quadro 3.1: Relação de páginas por livros analisados.

Livros	Nº de páginas
Matemática no Ensino Médio	38
Matemática Aula por Aula	15
Matemática	26
Matemática (Manoel Paiva)	06
Matemática Fundamental	21
Os Elos da Matemática	30
Matemática para o Ensino Médio	34

Para analisar os livros, resolvemos considerar os seguintes critérios:

- Aspectos históricos;
- Formas de abordagem do conceito e da definição através da linguagem, da notação e da construção de gráficos;
- Problemas e exercícios.

A consideração histórica, a respeito do conceito, constitui, mais uma oportunidade do aluno em relacionar a matemática com o seu dia-a-dia, no qual a dissocia de uma coisa pronta e acabada. Tendo o conhecimento histórico, o aluno deverá compreender melhor a necessidade desse conceito.

Na abordagem do conceito, acredita-se que a linguagem utilizada, na introdução, deve ser a mais próxima possível da linguagem do aluno. A aprendizagem em matemática deve levar a um processo de construção de uma linguagem e não apresentá-la já na forma final, formal e acabada.

Educação é uma estratégia desenvolvida pelas sociedades para facilitar e estimular a ação comum ao mesmo tempo em que dá a cada um oportunidade de atingir seu pleno potencial criativo. Claro, cada um se realiza plenamente nesta ação comum. (...) A função do professor é a de um associado aos alunos na consecução da tarefa, e consequentemente na busca de novos conhecimentos. Alunos e professores devem crescer, social e intelectualmente, no processo. (D' AMBROSIO, 2000, p. 89-90)

Os problemas e exercícios devem contribuir num primeiro momento, para a formação do conceito, para posteriormente sintetizar idéias trabalhadas. Sempre que possível, os exercícios devem ser contextualizados, levando-se em consideração a realidade do aluno,

suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento (biológico, psicológico e intelectual). Levamos em consideração, a existência de situações-problemas, cuja discussão gera conceito com suas representações, uma linguagem de comunicação das observações feitas. Observamos também, se os problemas propiciam o desenvolvimento do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas (ou se são meros cálculos repetitivos, treinamento).

3.2.1 Aspectos Históricos

Quanto aos aspectos históricos, observamos que cinco dos livros analisados não trazem referências históricas sobre o conteúdo estudado.

A exceção fica por conta de dois livros. Um deles é “Matemática Aula por Aula”, que apresenta um texto de duas páginas sobre a origem da trigonometria, porém, não faz relação da história com o conteúdo de trigonometria ou até mesmo sobre Funções Circulares.

A outra exceção é o livro “Matemática”, do Dante, que traz na introdução de Funções Circulares dois parágrafos sobre o matemático que tentou construir o gráfico da função seno, no entanto, não faz uma relação com o conteúdo.

3.2.2 Introdução do Conceito e da Definição

Todos os livros analisados apresentam a definição de Funções Circulares seguida de exemplos. A linguagem utilizada é formal e o texto se desenvolve de modo que, não favorece a participação do aluno na construção do conceito.

Dos sete livros analisados, apenas o livro “Matemática” de Manoel Paiva, não traz em seu conteúdo as funções cotangente, secante e cossecante. Os outros seis livros analisados apresentam essas funções em seu conteúdo e apenas dois deles trazem os gráficos das funções secante, cotangente e cossecante. São eles: “Matemática” do Dante e “Matemática para o Ensino Médio” de Marcondes, Gentil e Sérgio.

O livro, “Os Elos da Matemática”, não apresenta em seu conteúdo os gráficos das Funções Circulares.

O único livro que traz um texto relacionado o conteúdo com algum fenômeno natural ou físico é o livro a “Matemática”, do Dante. Esse também apresenta outras funções que foi intitulada pelo autor de “Funções do Tipo Trigonométricas”. Segue um outro item intitulado “refletir”, no qual são colocadas para o aluno algumas perguntas, perguntas nas quais leva o aluno pensar sobre o tema trabalhado e até mesmo para sanar alguma dúvida.

3.2.3 Problemas e Exercícios

Cinco dos livros analisados apresentam os exercícios para a realização de meros cálculos, ou seja, de forma descontextualizada.

A exceção fica por conta de dois livros. Um deles é o livro “Matemática no Ensino Médio” que trabalha as listas de exercícios intercalando exercícios que envolvam cálculos com exercícios que necessitam das definições para a sua resolução.

O outro livro é o “Matemática”, do Dante, onde apresenta exercícios de cálculos repetitivos, porém no final do conteúdo traz exercícios resolvidos contextualizados e uma lista de exercícios no qual é trabalhado essas aplicações.

3.3 PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM)

Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamentos.

No ensino médio, a matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais ciências da natureza.

Aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens

específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente nos enfrentamentos de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas.

Não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos das competências, pelo contrário, essas são duas dimensões de aprendizagem que devem ocorrer conjuntamente.

Segundo os PCN's, existem três grandes competências:

- Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
- Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problemas, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- Contextualizados das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

A proposta de matemática dos PCNEM é que cada escola e grupo de professores proponham um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas.

Explorar conteúdos relativos aos temas números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes modos de pensar em matemática, diferentes contextos para as aplicações, bem como, existência de razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos.

Um primeiro critério, básico e geral, é que os conteúdos ou temas escolhidos devem permitir ao aluno desenvolver as competências descritas no item anterior, avançando a partir do ponto em que se encontra.

Um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas, com relevância científica e cultural, e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio:

- 1) Álgebra: números e funções;
- 2) Geometria e medidas;
- 3) Análise de dados.

Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização em termos de linguagem, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo.

3.3.1 Álgebra: Números e Funções

O primeiro tema ou eixo estruturador, Álgebra, na vivência cotidiana, se apresenta com enorme importância enquanto linguagem, com uma variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculo de natureza financeira e prática, em geral para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonométricas.

O estudo de funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problemas, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.

Apesar de sua importância, tradicionalmente, a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial, o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve-se ater as funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e a perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo, deste tema, é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo.

Resumidamente, em relação às competências a serem desenvolvidas pela matemática, a abordagem proposta para esse tema permite ao aluno usar e interpretar

modelos, perceber o sentido de transformações, buscar regularidades, conhecer o desenvolvimento histórico e tecnológico de parte de nossa cultura e adquirir uma visão sistematizada de parte do conhecimento matemático.

4 FUNÇÕES CIRCULARES

Em matemática, as funções trigonométricas são funções angulares, importantes no estudo de triângulos e na modelagem de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões de dois lados de um triângulo retângulo, contendo o ângulo ou, de forma mais geral, como razões de coordenadas de pontos no círculo unitário. Pode ainda, ser definida como séries infinitas ou, de forma igualmente geral, como soluções para certas equações diferenciais.

As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria circular e são importantes devido à sua periodicidade, pois, elas podem representar fenômenos naturais periódicos, como as variações da temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, a pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos, astronomia (especialmente para localização de posições aparentes de objetos celestes, em qual a trigonometria esférica é essencial) e, portanto, navegação (nos oceanos, em aviões, e no espaço), teoria musical, acústica, óptica, análise de mercado, eletrônica, teoria da probabilidade, estatística, biologia, equipamentos médicos (por exemplo, Tomografia Computadorizada e Ultrassom), farmácia, química, teoria dos números (e, portanto, criptologia), sismologia, meteorologia, oceanografia, muitas das ciências físicas, solos (inspeção e geodésia), arquitetura, fonética, economia, engenharia, gráficos computadorizados, cartografia, cristalografia e desenvolvimento de jogos.

4.1 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Dados dois pontos A e B numa circunferência, podemos sair de A e chegar em B de duas maneiras:

A circunferência é orientada e, por convenção, o sentido anti-horário é considerado o sentido positivo e conseqüentemente, o sentido horário é o negativo.

Sentido anti-horário.

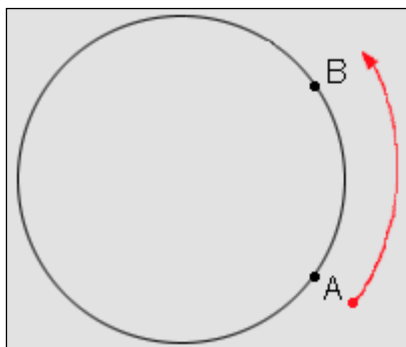


Figura 4.1: Sentido anti-horário.

Sentido horário.

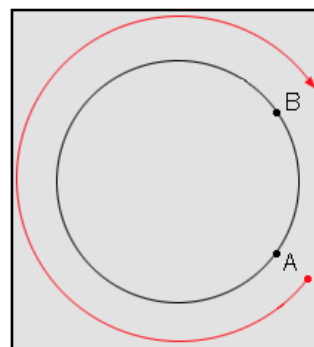


Figura 4.2: Sentido horário.

Notamos que a cada arco orientado, corresponde a um ângulo central orientado. Além disso, precisamos uma forma de medir os arcos orientados e, portanto, dos correspondentes ângulos centrais orientados.

Uma circunferência orientada, de raio unitário ($r = 1$), sobre a qual um ponto A é a origem de medida de todos os arcos nela contidos, é uma **Circunferência Trigonométrica**. Como o raio da circunferência é unitário, cada arco de comprimento L , isto é, o arco tem comprimento igual a L unidades de medida de comprimento.

Com esse modelo geométrico, podemos estender as definições das funções trigonométricas para qualquer ângulo central orientado e, portanto, para qualquer arco orientado.

Para medir um arco qualquer AB , precisamos verificar quantas vezes a unidade de medida “cabe” nele. A fim de medir arcos e ângulos orientados, temos duas unidades de medida específicas: o *grau* e o *radiano*.

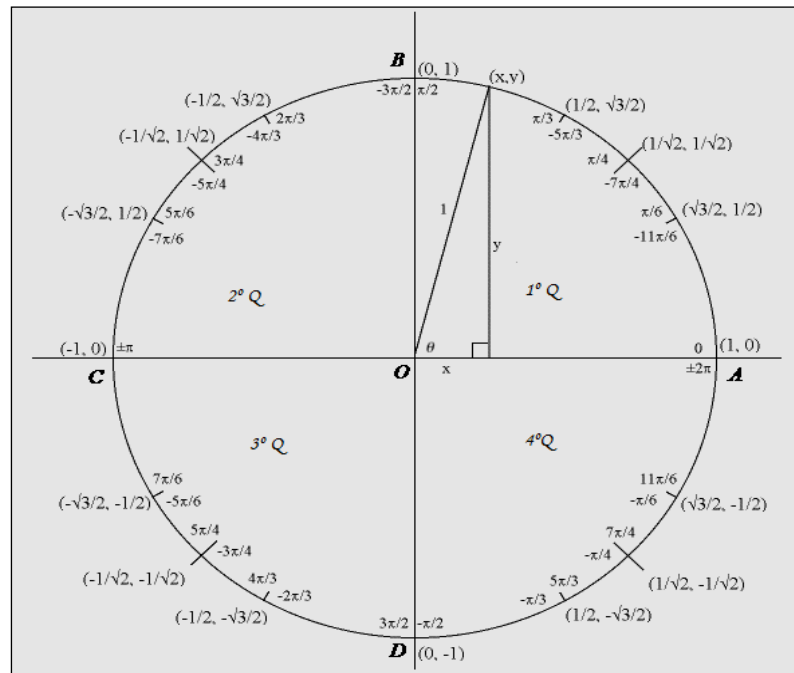


Figura 4.3: Círculo Trigonométrico de raio unitário.

Apesar do grau, ser uma unidade bastante popular na medida de ângulos, ele não está relacionado com as propriedades métricas do plano e também não é usado no cálculo. Portanto, o objetivo agora é apresentar uma unidade que possua essas características.

Considere uma circunferência de centro O e um arco AB nessa circunferência. Se o arco AB tem comprimento igual ao raio, dizemos que ele mede 1 radiano. Assim, radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o referido arco. Como ao arco está associado um ângulo central, também podemos dizer que radiano é a medida do ângulo central, que determina na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao raio.

Uma vez que uma circunferência qualquer tem comprimento $C = 2\pi r$, o arco de uma volta tem medida igual a 2π radianos.

4.1.1 Arcos Côngruos

Dois arcos são congruentes ou côngruos, quando possuem a mesma extremidade.

Convém trabalharmos com arcos da primeira volta do sentido positivo. Caso isso não ocorra, como por exemplo, com 480° , determinamos o seu côngruo da primeira volta positiva.

Uma forma mais simples de obtermos esse resultado é dividir 480° por 360° , para extrair o número de voltas. O resto da divisão é a medida do arco de mesma extremidade.

$$\begin{array}{rcl} 480^\circ & | & 360^\circ \\ 120^\circ & \xrightarrow{1} & \text{números de volta no sentido positivo.} \\ \downarrow & & | \\ & & \text{medida do arco de mesma extremidade.} \end{array}$$

Para medidas negativas, esse procedimento nos leva ao arco côngruo da primeira “volta negativa”. Daí, basta somarmos 360° para chegarmos a primeira “volta positiva”.

Consideremos β a medida de um arco, a expressão geral das medidas dos arcos côngruos a ele é dada por: $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (em graus) ou $\alpha + k \cdot 2\pi$ (em radianos) onde α é a medida do arco côngruo da primeira volta positiva e $k \in \mathbb{Z}$.

α é chamada de primeira determinação positiva.

4.2 FUNÇÃO SENO

Seno de um arco – associando cada número real x a um arco da circunferência trigonométrica, com origem no ponto $A(1, 0)$ e extremidade em um ponto P tal que $m(AP) = x \text{ rad}$, dizemos que seno do arco x é a ordenada OP_1 do ponto P . Veja a figura 4.4 abaixo.

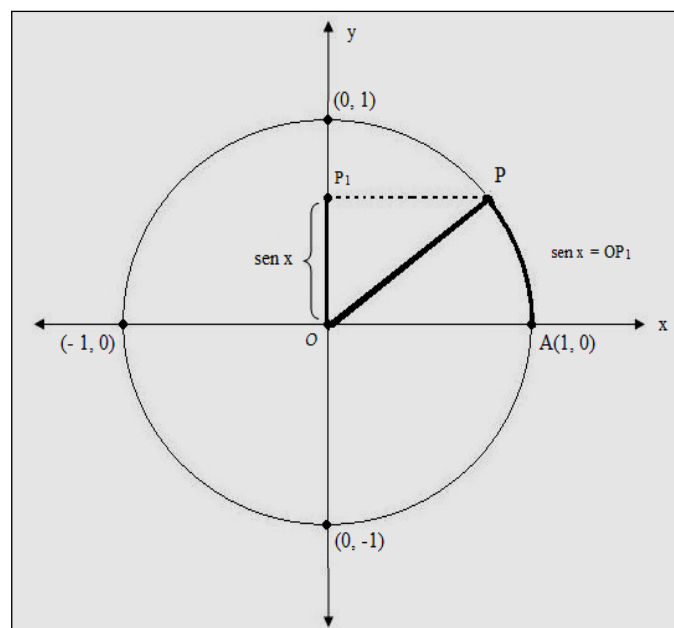


Figura 4.4: Seno de um arco.

Definição 4.1: Chamamos de função seno a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada número real x , associa o seno desse número: $f(x) = \text{sen } x$.

O domínio dessa função é os \mathbb{R} e a $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, visto que na circunferência trigonométrica, o raio é unitário, assim:

$$D(\text{sen } x) = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\text{sen } x) = [-1, 1].$$

4.2.1 Sinal da Função Seno

Como $\text{sen } x$ é a ordenada do ponto-extremidade do arco:

- $f(x) = \text{sen } x$ é positiva no primeiro e no segundo quadrantes (ordenadas positivas);
- $f(x) = \text{sen } x$ é negativa no terceiro e quarto quadrantes (ordenadas negativas).

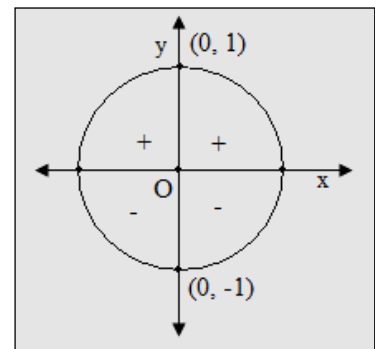


Figura 4.5: Sinal da função.

4.2.2 Gráfico da Função Seno

Para construir o gráfico da função seno, devemos localizar inicialmente, na circunferência trigonométrica, os pontos extremos dos quadrantes, cujas coordenadas são conhecidas.

Assim, sabendo que:

- $\text{sen } 0^\circ = 0$;
- $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$;
- $\text{sen } \pi = 0$;
- $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$;
- $\text{sen } 2\pi = 0$

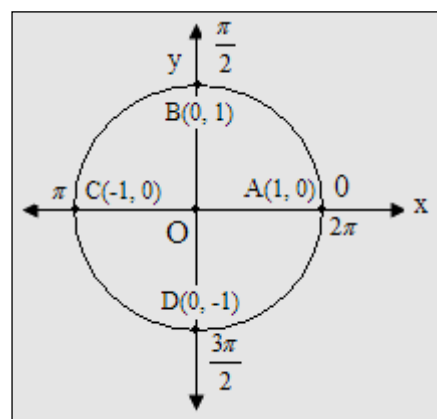


Figura 4.6: Circunferência trigonométrica.

Podemos marcar esses valores no plano cartesiano:

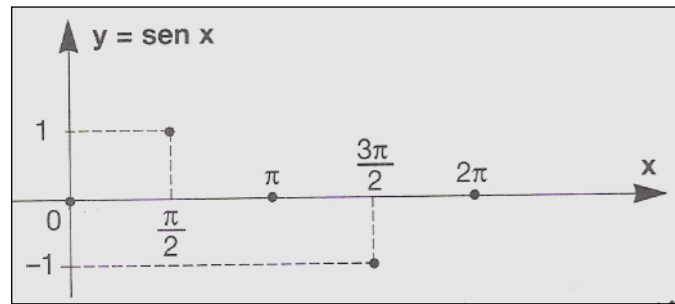


Figura 4.7: Sistema cartesiano.

Das relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e podemos acrescentar esses valores ao}$$

gráfico, construindo a parte que corresponde aos valores do primeiro quadrante:

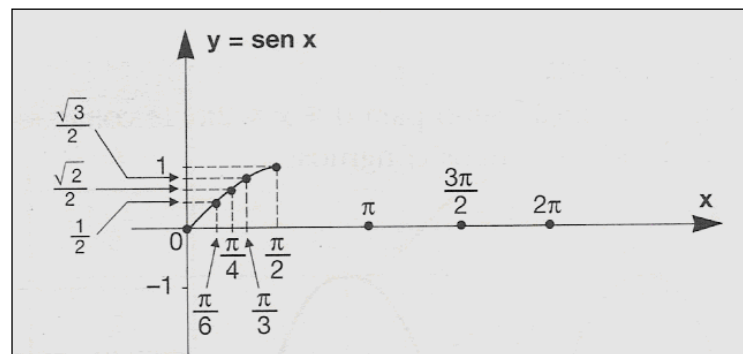


Figura 4.8: 1º quadrante da função seno.

A partir desses valores, outros podem ser determinados por simetria na circunferência trigonométrica.

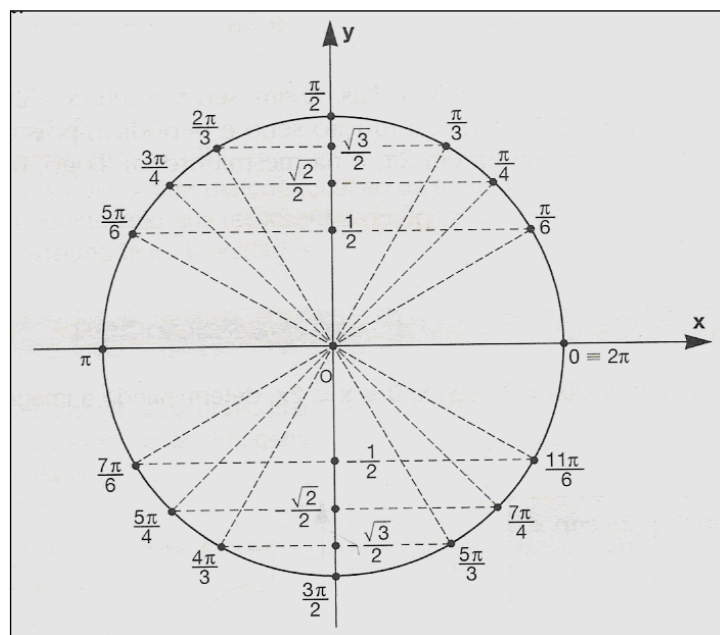


Figura 4.9: Pontos simétricos da função seno.

Marcando esses valores no plano cartesiano, completamos o gráfico com as partes que correspondem ao 2º, 3º e 4º quadrantes:

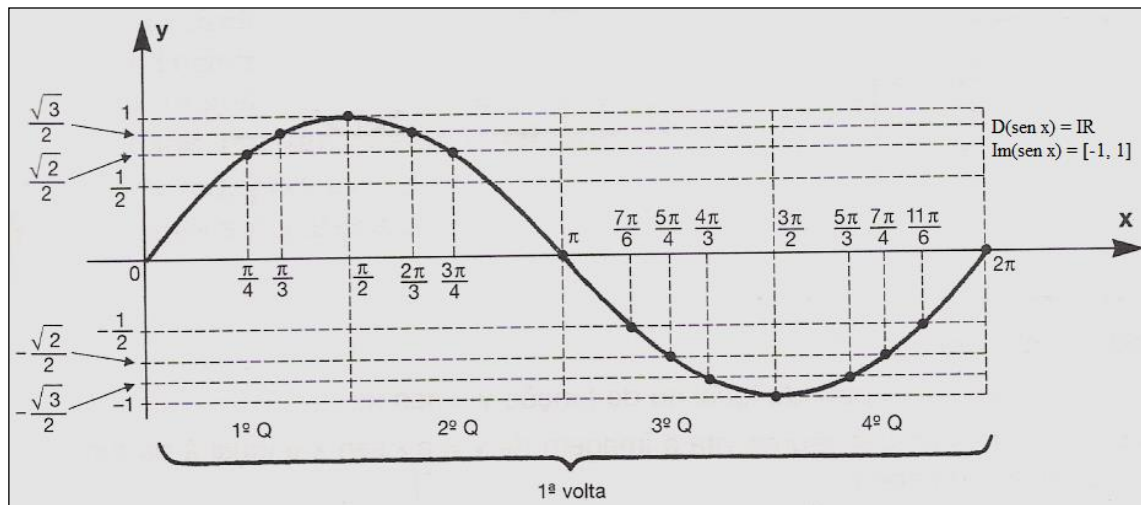


Figura 4.10: Gráfico da função seno.

Podemos perceber, pela circunferência trigonométrica e pelo gráfico, que os valores do 2º quadrante são simétricos aos do 1º, e os do 4º são simétricos ao do 3º.

Observando o gráfico da função podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.1: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1º	2º	3º	4º
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	+	-	-
VARIAÇÃO	$0 \uparrow +1$	$+1 \downarrow 0$	$0 \downarrow -1$	$-1 \uparrow 0$
	crescente	decrésciente	decrésciente	crescente

4.2.3 Período da Função Seno

O comportamento da função seno para $0 \leq x \leq 2\pi$ (1ª volta) se repete para $2\pi \leq x \leq 4\pi$ (2ª volta) devido aos arcos côngruos:

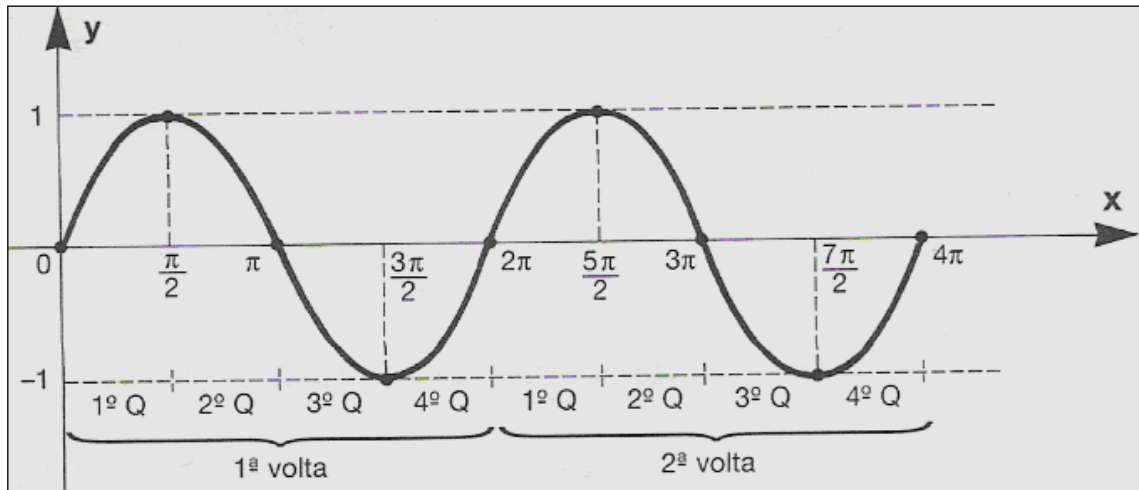


Figura 4.11: Período da função seno.

E se repete para outros valores. Assim, $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } (x + 4\pi) = \dots = \text{sen } (x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, a função seno é periódica, pois o valor de seno se repete a cada volta, ou seja, de 2π em 2π , e na mesma ordem. Logo, o período p é:

$$p(\text{sen } x) = 2\pi.$$

4.2.4 A Função Seno é Ímpar

Qualquer que seja o número real $\alpha > 0$, as imagens P e P' no ciclo trigonométrico, respectivamente, de α e de $-\alpha$ são simétricas entre si em relação ao eixo das abscissas, assim suas projeções ortogonais sobre o eixo dos senos, P_2 e P'_2 , são simétricas entre si em relação a O . Logo, $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por esse fato, dizemos que a função seno é ímpar. Graficamente temos:

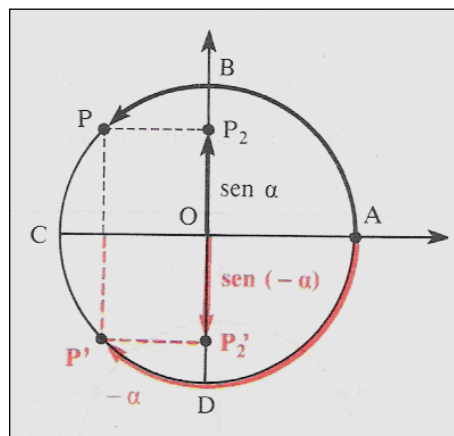


Figura 4.12: A função seno é ímpar.

4.2.5 Injetividade e Sobrejetividade

A função seno não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

$$\text{Ex) } \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = \dots = 1.$$

A função seno não é sobrejetiva, pois $[-1, 1] \neq \mathbb{R}$, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.

4.2.6 Análise Gráfica da Função Seno

Agora iremos analisar graficamente o comportamento de uma função seno mais geral, $y = a \sin(bx + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \sin x$. Para realizar as análises gráficas será utilizado, a partir de agora, o software **Graphmática**.

1ª SITUAÇÃO: Seja $y = (\sin x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Para responder a essa questão, façamos $k = 1$. Observe o comportamento dos gráficos.

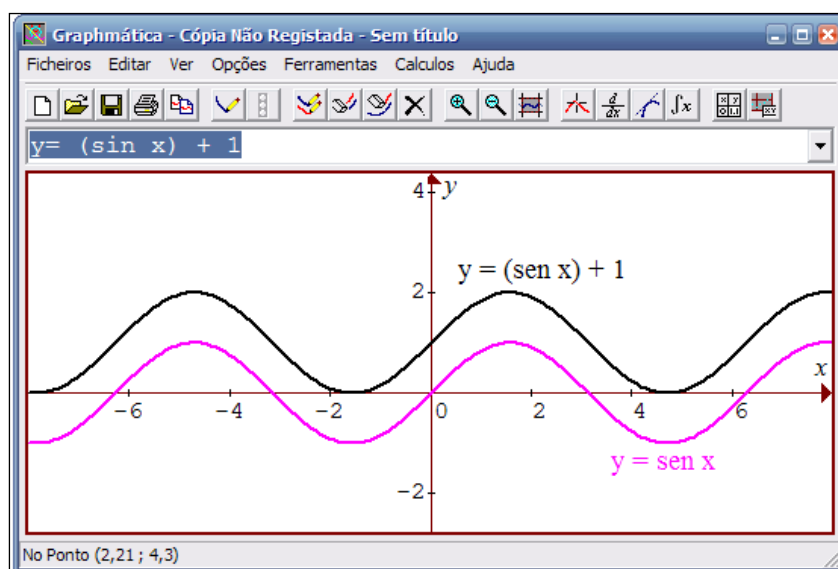


Figura 4.13: Análise gráfica das funções $y = (\sin x) + 1$ e $y = \sin x$.

Observamos que cada ponto do gráfico de $y = (\text{sen } x) + 1$ tem ordenada igual a uma unidade a mais do que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = \text{sen } x$. Ou seja, o gráfico de $y = (\text{sen } x) + 1$ é o resultado de uma translação vertical de 1 unidade da curva que é o gráfico de $y = \text{sen } x$. É fácil generalizar esse raciocínio quando utiliza-se outros valores de k , ou seja, a conclusão é análoga para qualquer outro valor de k : o gráfico de $y = (\text{sen } x) + k$ sofre uma translação vertical de k unidades, quando comparado ao gráfico de $y = \text{sen } x$. Portanto, o gráfico de $y = (\text{sen } x) + 1$, “sobe” ou “desce” em relação a posição inicial de $y = \text{sen } x$, conforme $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente.

2ª SITUAÇÃO: Seja $y = a \cdot \text{sen } x$, onde a é uma constante real, com $a \neq 0$, pois se $a = 0$, a função obtida não será a função seno, mais sim a função constante real nula.

Atribuindo valores ao coeficiente a , por exemplo, $a = 2$ e $a = \frac{1}{2}$ (valores positivos) e $a = -1$ e

$a = -\frac{1}{2}$ (valores negativos), desse modo, pode-se chegar a uma conclusão geral. Pode-se

observar que no gráfico de $y = 2(\text{sen } x)$, em cada ponto, a ordenada é o dobro daquela do ponto de mesma abscissa do gráfico de $y = \text{sen } x$. Dessa forma, o coeficiente 2 na expressão da função provoca uma mudança de inclinação na curva, que é seu gráfico, em comparação ao gráfico inicial. As raízes, evidentemente, continuam as mesmas.

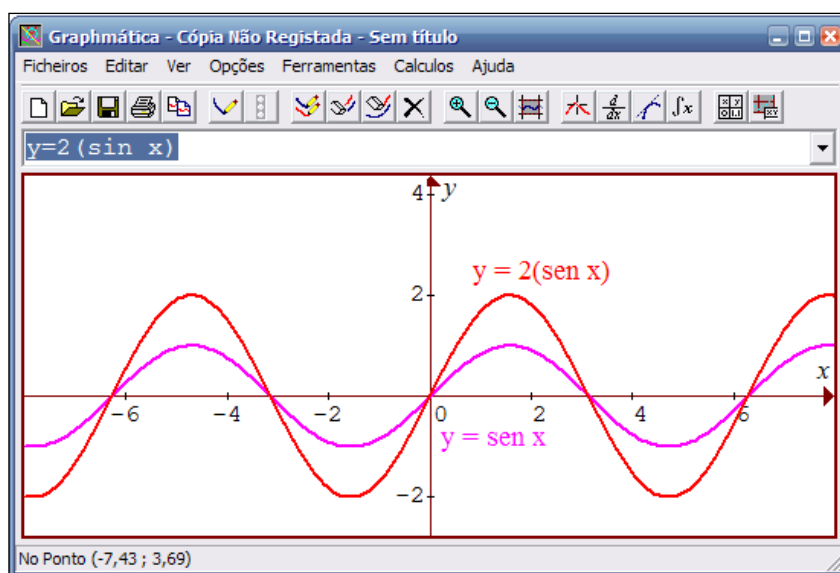


Figura 4.14: Análise gráfica das funções $y = 2(\text{sen } x)$ e $y = \text{sen } x$.

No gráfico de $y = \frac{1}{2}(\sin x)$, em cada ponto, a ordenada é a metade daquela do ponto de mesma abscissa do gráfico de $y = \sin x$. Dessa forma, quando a tende a zero, o gráfico dessa função tende a ser o próprio eixo x .

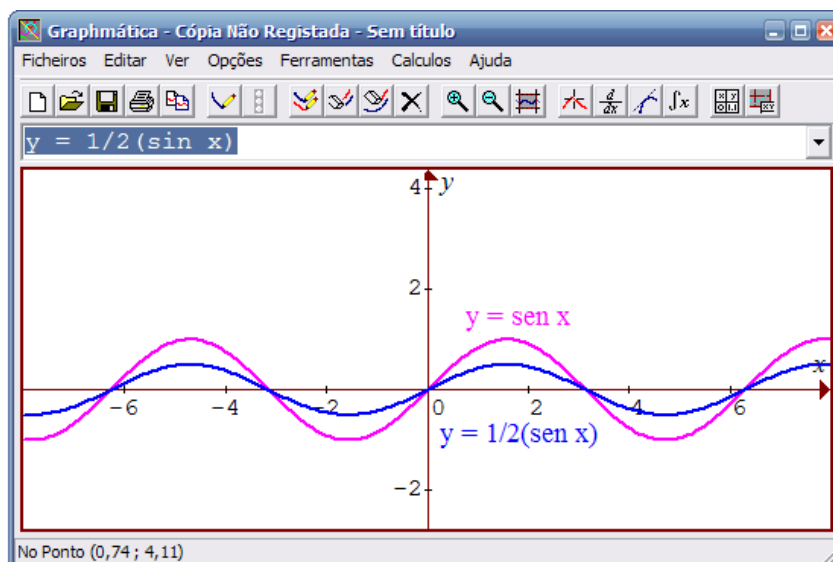


Figura 4.15: Análise gráfica das funções $y = 1/2(\sin x)$ e $y = \sin x$.

No caso de a ser negativo observaremos apenas a situação mais simples de $y = -\sin x$. Cada ponto desse gráfico tem ordenada igual ao oposto do valor da ordenada do ponto de mesma abscissa em $y = \sin x$. O seu gráfico é, portanto, uma curva **simétrica**, em relação ao eixo horizontal, à curva que é o gráfico de $y = \sin x$. Analogamente, podemos fazer o gráfico considerando qualquer outro valor negativo de a , observando a simetria em relação ao eixo horizontal, quando fazemos a comparação com o gráfico da função oposta.

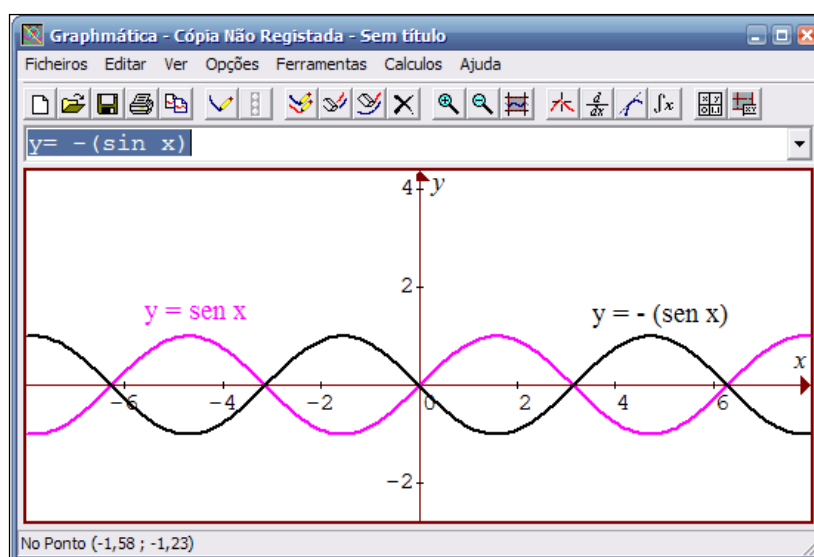


Figura 4.16: Análise gráfica das funções $y = -(\sin x)$ e $y = \sin x$.

Assim, o coeficiente a , em $y = a \cdot \text{sen } x$, tem o papel de mudar a inclinação do gráfico da função $y = \text{sen } x$. Quando $a > 1$, a inclinação aumenta, quando $0 < a < 1$, a inclinação diminui. Quando o coeficiente a é negativo, o gráfico de $y = a \cdot \text{sen } x$ sofre uma reflexão em relação ao eixo horizontal, quando comparado ao gráfico da função oposta.

3ª SITUAÇÃO: Seja $y = \text{sen } (x + m)$, onde $m \in \mathbb{R}^*$. Para essa análise façamos $m = 1$. Observe.

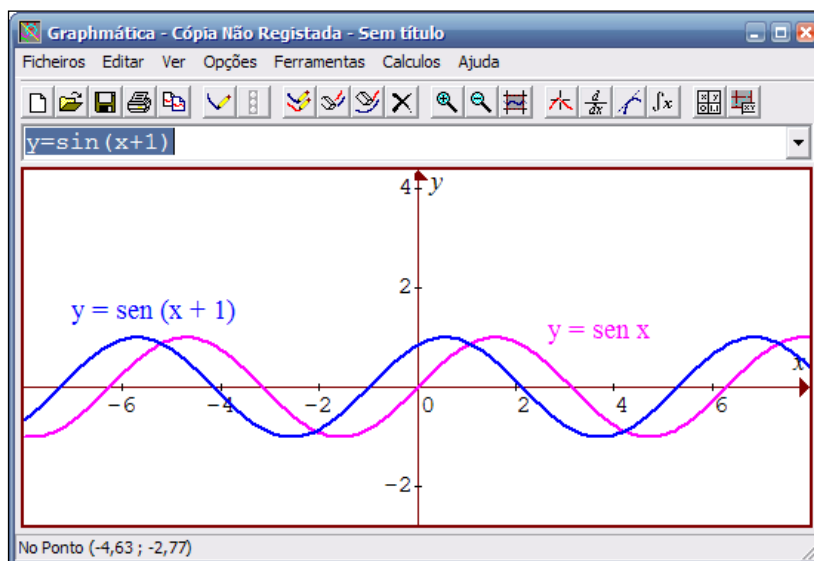


Figura 4.17: Análise gráfica das funções $y = \text{sen } (x + 1)$ e $y = \text{sen } x$.

Em $y = \text{sen } x$ temos que o ponto $(0, 0)$ pertence ao gráfico, enquanto que, em $y = \text{sen } (x + 1)$, ele não pertence. O fato importante é que o “papel realizado” por $x = -1$ em $y = \text{sen } (x + 1)$ é o mesmo que o “papel desempenhado” por $x = 0$ em $y = \text{sen } x$. Dessa forma, o gráfico de $y = \text{sen } (x + 1)$ sofreu uma translação horizontal de -1 quando comparado ao gráfico de $y = \text{sen } x$.

Para qualquer outro valor de m não-nulo, a análise é semelhante, quando comparado com o gráfico da função mais simples, $y = \text{sen } x$. Sempre ocorre uma translação horizontal de $-m$ no gráfico em relação a $y = \text{sen } x$.

4ª SITUAÇÃO: Seja $y = \text{sen } (bx)$, onde b é uma constante real não-nula. Para isso, vejamos quando $b = 2$ e $b = \frac{1}{2}$.

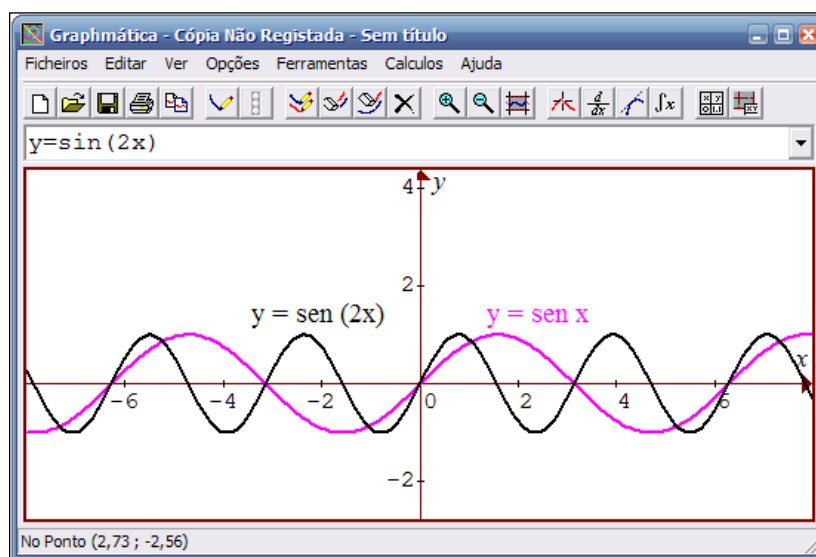


Figura 4.18: Análise gráfica das funções $y = \sin(2x)$ e $y = \sin x$.

Aquilo que chama a atenção é o fato de que o período de $y = \sin(2x)$ é justamente a metade daquele de $y = \sin x$.

Por outro lado, devemos analisar o gráfico de $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Neste caso, aquilo que imediatamente chama a atenção é o fato de que o período de $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ é justamente o dobro daquele de $y = \sin x$.

De modo geral, para $b > 0$, a ação da constante b é a de provocar mudança no período da função de período $\frac{2\pi}{b}$.

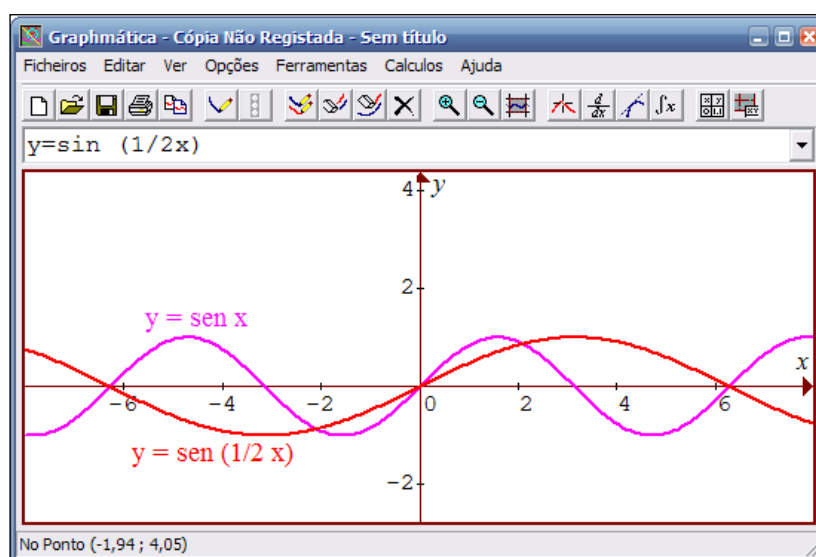


Figura 4.19: Análise gráfica das funções $y = \sin(1/2 x)$ e $y = \sin x$.

Entretanto, é preciso analisar o que acontece quando b é negativo. Para isto, basta observar que a função seno é uma função ímpar e, conseqüentemente, $\text{sen}(-bx) = -\text{sen}(bx)$.

Dessa maneira, o gráfico da função $y = \text{sen}(-bx)$ é o simétrico em relação ao gráfico de $y = \text{sen}(bx)$, com relação ao eixo horizontal.

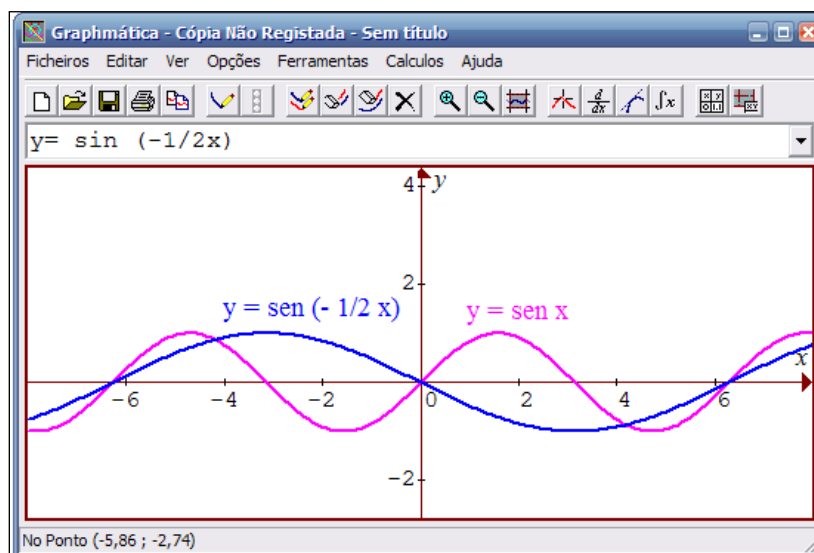


Figura 4.20: Análise gráfica das funções $y = \text{sen}(-1/2 x)$ e $y = \text{sen } x$.

4.3 FUNÇÃO COSSENO

Cosseno de um arco – associando cada número real x a um arco da circunferência trigonométrica, com origem no ponto $A(1, 0)$ e extremidade em um ponto P tal que $m(\widehat{AP}) = x \text{ rad}$, podemos dizer que cosseno do arco x é a abscissa OP_2 do ponto P .

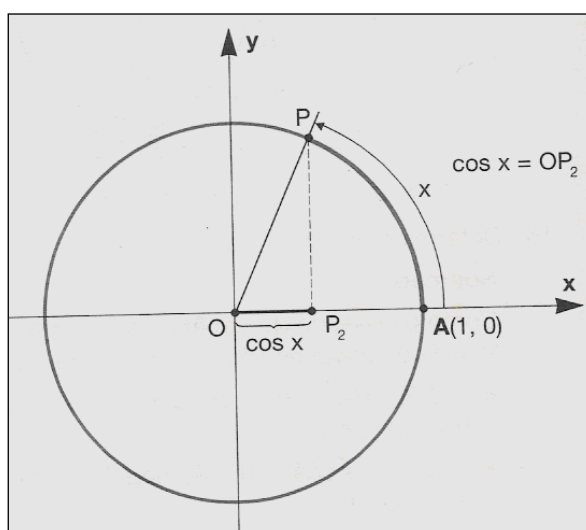


Figura 4.21: Cosseno de um arco.

Definição 4.2: Chamamos de função cosseno a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada número real x , associa o cosseno desse número:

$$f(x) = \cos x.$$

O domínio de f é os reais e a $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, uma vez que a circunferência trigonométrica o raio é unitário, assim:

$$D(\cos x) = \mathbb{R};$$

$$\text{Im}(\cos x) = [-1, 1].$$

4.3.1 Sinal da Função Cosseno

Como $\cos x$ é a abscissa do ponto-extremidade do arco:

- $f(x) = \cos x$ é positiva no primeiro e quarto quadrantes (abscissa positiva);
- $f(x) = \cos x$ é negativa no segundo e terceiro quadrantes (abscissa negativa).

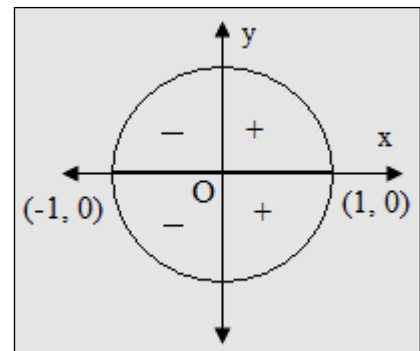


Figura 4.22: Sinal da função cosseno.

4.3.2 Gráfico da Função Cosseno

Para construir o gráfico da função cosseno devemos localizar, inicialmente, na circunferência trigonométrica, os pontos extremos dos quadrantes, cuja as coordenadas são conhecidas.

Assim, sabendo que:

$$\cos 0 = 1; \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\cos \pi = -1;$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0;$$

$$\cos 2\pi = 1;$$

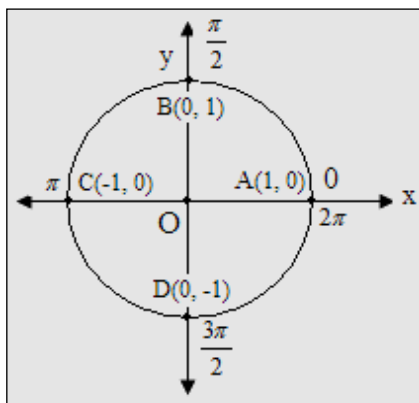


Figura 4.23: Circunferência trigonométrica.

Marcando esses pontos no gráfico temos:

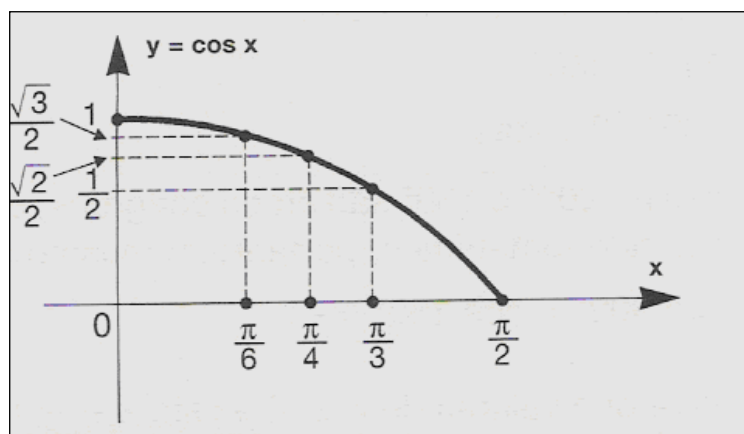


Figura 4.24: 1º quadrante da função

A partir desses valores, podemos determinar outros, do segundo, terceiro e quarto quadrantes, na circunferência trigonométrica, por simetria, e completar o gráfico:

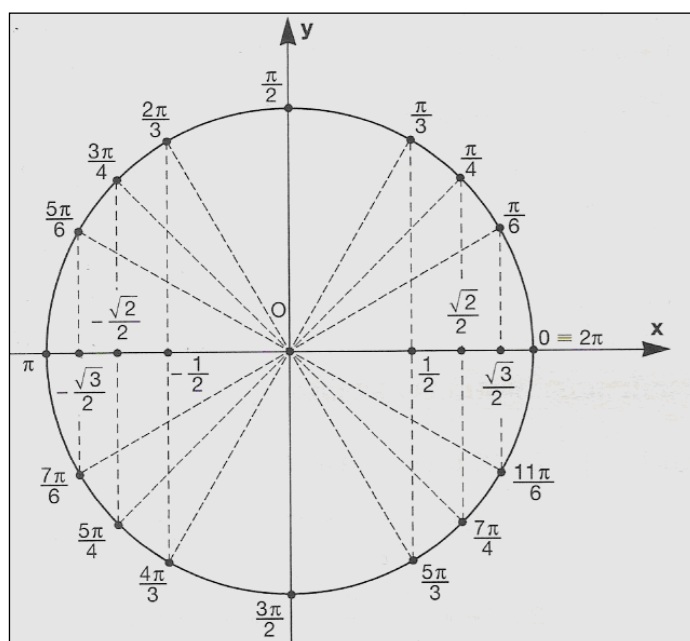


Figura 4.25: Pontos simétricos da função cosseno.

Marcando esses valores no plano cartesiano, completamos o gráfico com as partes que correspondem ao 2º, 3º e 4º quadrantes:

Podemos perceber que os valores do 1º quadrante são simétricos em relação aos do 4º, e os do 2º são simétricos aos do 3º.

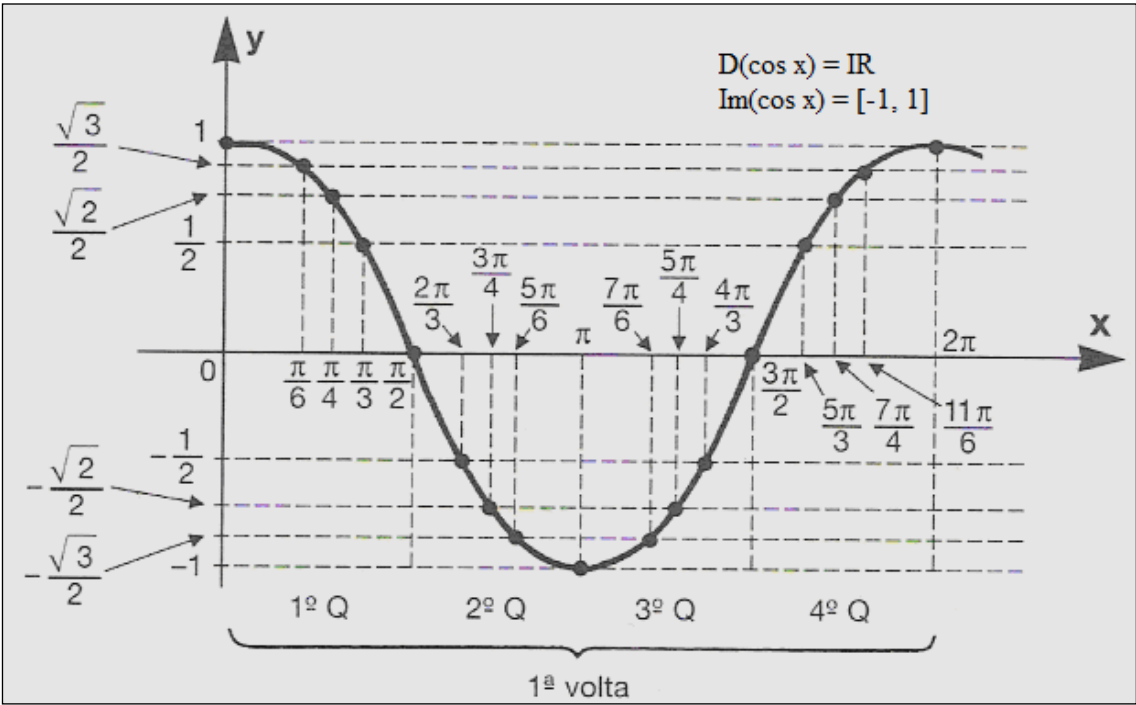


Figura 4.26: Gráfico da função cosseno.

Observando o gráfico da função podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.2: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1º	2º	3º	4º
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	-	-	+
VARIAÇÃO	$0 \downarrow +1$	$-1 \downarrow 0$	$0 \uparrow -1$	$+1 \uparrow 0$
	decrecente	decrecente	crescente	crescente

4.3.3 Período da Função Cosseno

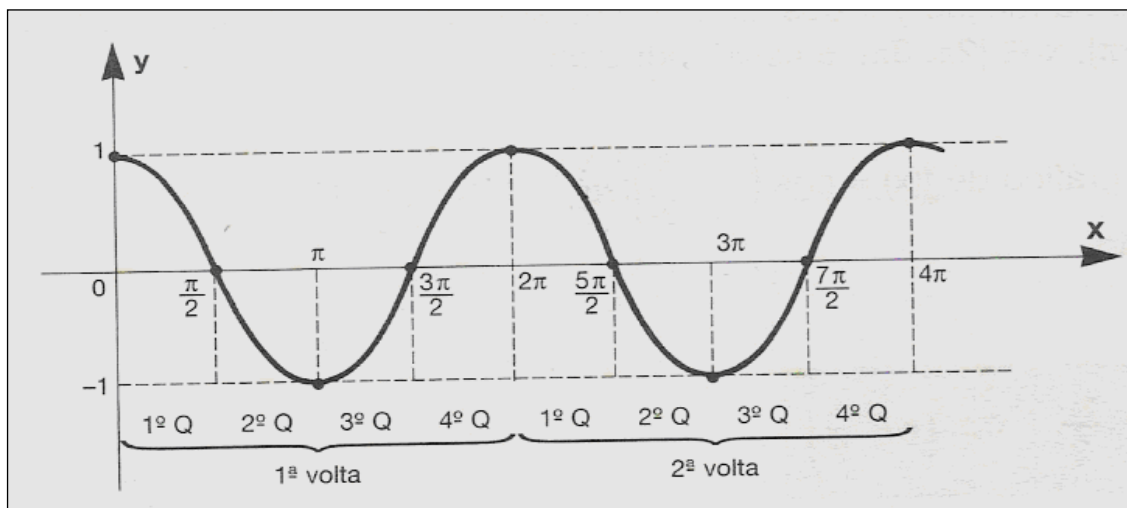


Figura 4.27: Período da função cosseno.

O comportamento da função cosseno para $0 \leq x \leq 2\pi$ (1ª volta) se repete para $2\pi \leq x \leq 4\pi$ (2ª volta):

E se repete também para as outras voltas. Assim, $\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \dots = \cos(x + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, a função cosseno é periódica, pois o valor do cosseno se repete a cada volta, ou seja, de 2π em 2π , e na mesma ordem. Logo, o período p é:

$$p(\cos x) = 2\pi.$$

4.3.4 A Função Cosseno é Par

Qualquer que seja o número real $\alpha > 0$, as imagens P e P' no ciclo trigonométrico, respectivamente, de α e de $-\alpha$ são simétricas entre si em relação ao eixo das abscissas. Logo, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por esse fato, dizemos que a função cosseno é par. Graficamente temos:

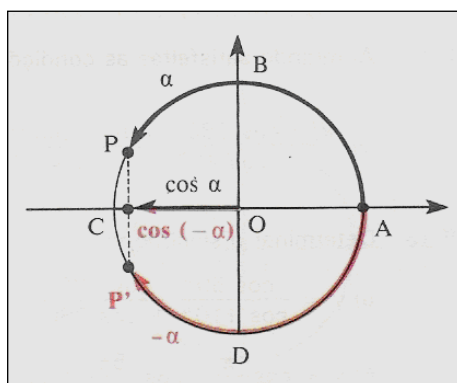


Figura 4.28: A função cosseno é par.

4.3.5 Injetividade e Sobrejetividade

A função cosseno não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

$$\text{Ex) } \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{5\pi}{2} = \cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = \dots = 0.$$

A função cosseno não é sobrejetiva, pois $[-1, 1] \neq \mathbb{R}$, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.

4.3.6 Análise Gráfica da Função Cosseno

A análise gráfica do comportamento de uma função cosseno mais geral, $y = a \cos (bx + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \cos x$, podem ser verificadas de forma análoga as situações 1, 2, 3 e 4 apresentadas na função seno. Lembrando que tais situações devem respeitar o comportamento do gráfico e as propriedades da função cosseno.

4.4 FUNÇÃO TANGENTE

Tangente de um arco – considere a circunferência trigonométrica e uma reta t paralela ao eixo y traçada pelo ponto A . A essa reta, com a mesma orientação do eixo y , damos o nome de eixo das tangentes.

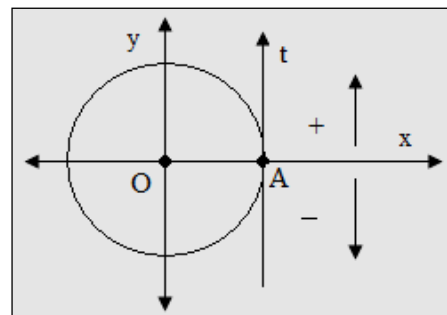


Figura 4.29: Eixo das tangentes.

Traçando uma reta que passa pelo centro O e por um ponto P qualquer da circunferência trigonométrica, essa reta OP , interceptará o eixo das tangentes num ponto T , determinando em t um segmento orientado AT . Assim, tangente do arco AP é a medida algébrica do segmento orientado AT : $\text{tg } \overrightarrow{AP} = AT$

Se associarmos ao arco \overrightarrow{AP} um número real x tal que $m(\overrightarrow{AP}) = x \text{ rad}$, podemos dizer que $\text{tg } x = AT$.

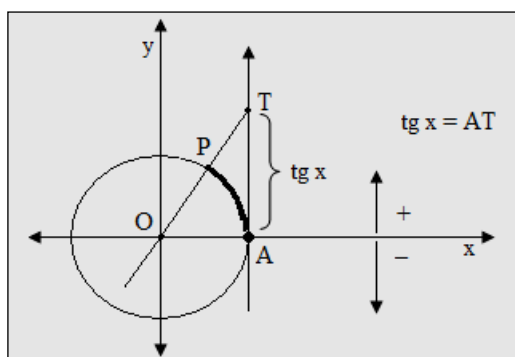


Figura 4.30: Tangente de um arco.

Definição 4.3: Chamamos de função

tangente a função f definida de

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ em \mathbb{R} que a cada número $x \in E$ associa a tangente desse número: $f(x) = \text{tg } x$.

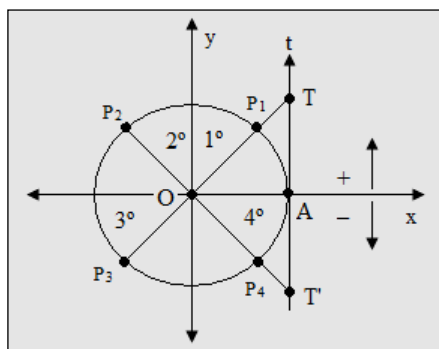


Figura 4.31: Circunferência trigonométrica.

Dessa forma: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid$

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Observe a circunferência trigonométrica a figura 4.31 ao lado:

Note que, no primeiro e terceiro quadrantes, a função $\text{tg } x$ varia de 0 até $+\infty$ e, no segundo e quarto quadrantes, de $-\infty$ até 0. Assim:

$\text{Im}(\text{tg } x) =] - \infty, + \infty[= \mathbb{R}$.

4.4.1 Sinal da Função Tangente

Observando a circunferência trigonométrica, podemos analisar o sinal da função tangente. Vemos que a função é positiva para os valores do 1º e do 3º quadrantes e negativa para valores do 2º e do 4º quadrantes.

$tg x$ é nula para $x = 0 \text{ rad}$ e $x = \pi \text{ rad}$ (ou, de forma geral, para $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$).

$tg x$ não está definida para $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ (ou, de forma geral, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

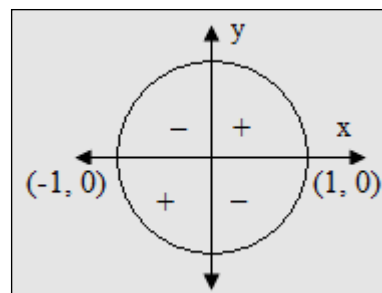


Figura 4.32: Sinal da função tangente.

4.4.2 Relação Entre Tangente, Seno e Cosseno de um Arco Trigonométrico

Observe a figura 4.33 a seguir:

O triângulo OMP é semelhante ao triângulo OAT . Assim, podemos escrever:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{MP}{AT}, \text{ como } OM = \cos x, MP = OP_1 = \sin x, AT = tg x \text{ e } AO = 1 \text{ (raio unitário):}$$

$$\frac{\cos x}{1} = \frac{\sin x}{tg x} \Rightarrow tg x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

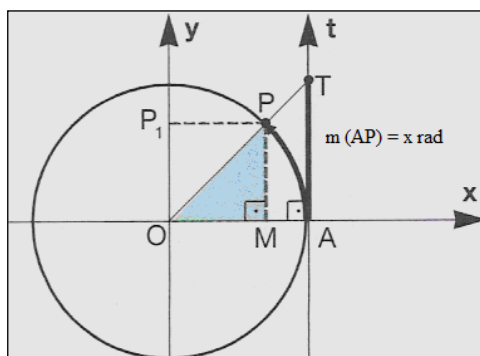


Figura 4.33: Relação entre tg, cos e sen.

4.4.3 Gráfico da Função Tangente

Com base nas relações trigonométricas, podemos obter os seguintes valores:

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$; $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ a partir deles, podemos determinar outros, por simetria.

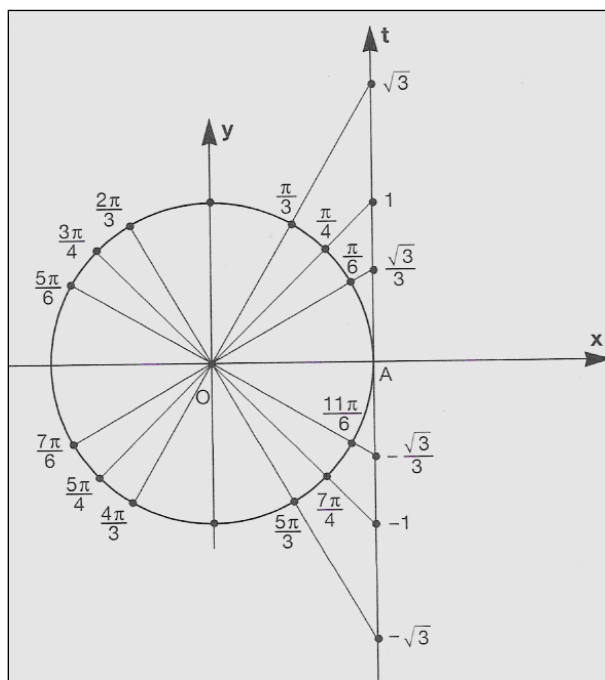


Figura 4.34: Pontos simétricos da função tangente.

Assim, para os valores de x tais que $0 \leq x \leq 2\pi$, temos:

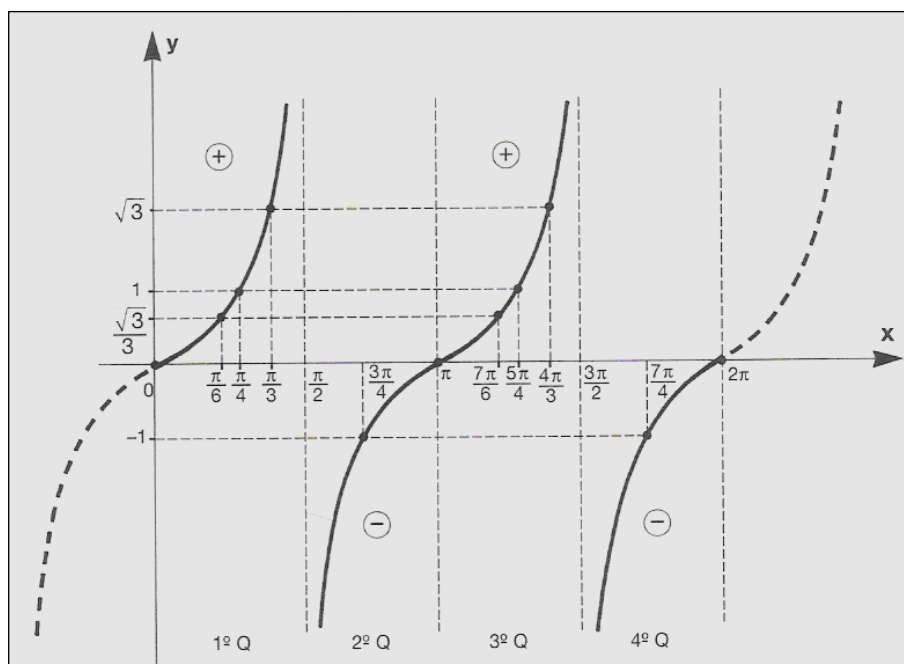


Figura 4.35: Gráfico da função tangente.

Observando o gráfico da função podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.3: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1º	2º	3º	4º
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	-	+	-
VARIAÇÃO	$0 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow 0$	$0 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow 0$
	crescente	crescente	crescente	crescente

4.4.4 Período da Função Tangente

Analisando o gráfico acima, observamos que o comportamento da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ no 1º e 2º quadrantes é o mesmo que no 3º e 4º quadrantes. Ou seja, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + 2\pi) = \dots = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, a função é periódica, pois seus valores se repetem a cada meia volta, de π em π , e na mesma ordem. Logo, o período p é: $p(\operatorname{tg} x) = \pi$.

4.4.5 A Função Tangente é Ímpar

Qualquer que seja o número real α , as imagens P e P' no ciclo trigonométrico, respectivamente, de α e de $-\alpha$ são simétricas entre si em relação ao eixo das abscissas. Para $\alpha \in D(\operatorname{tg})$, as intersecções de OP e OP' com AU , respectivamente, T e T' são simétricas entre si em relação a A . Logo, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, com $\alpha \in D(\operatorname{tg})$. Por esse fato, dizemos que função tangente é ímpar.

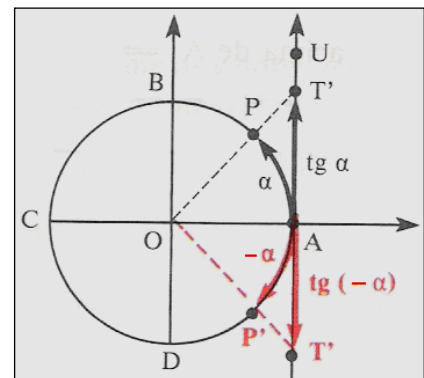


Figura 4.36: A função tangente é ímpar.

4.4.6 Injetividade e Sobrejetividade

A função tangente não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

$$\text{Ex) } \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = \operatorname{tg} 2\pi = 0.$$

A imagem da função tangente é os \mathbb{R} , isto é, para todo y real existe um x real tal que $\operatorname{tg} x = y$.

De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T' tal que $\overline{AT'} = y$. Construindo a reta OT' , observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos P e P' , imagens dos reais x cuja tangente é y . Logo, a função tangente é sobrejetora.

4.4.7 Análise Gráfica da Função Tangente

Agora iremos analisar graficamente o comportamento da função tangente de forma mais geral, $y = a \operatorname{tg}(bx + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$. Para realizar as análises gráficas será utilizado, novamente, o software **Graphmática**.

1ª SITUAÇÃO: Seja $y = (\operatorname{tg} x) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Qual será a ação da constante k no gráfico desta nova função quando comparado ao gráfico da função inicial $y = \operatorname{tg} x$? Para responder a essa pergunta, façamos $k = 1$. Observe o gráfico.

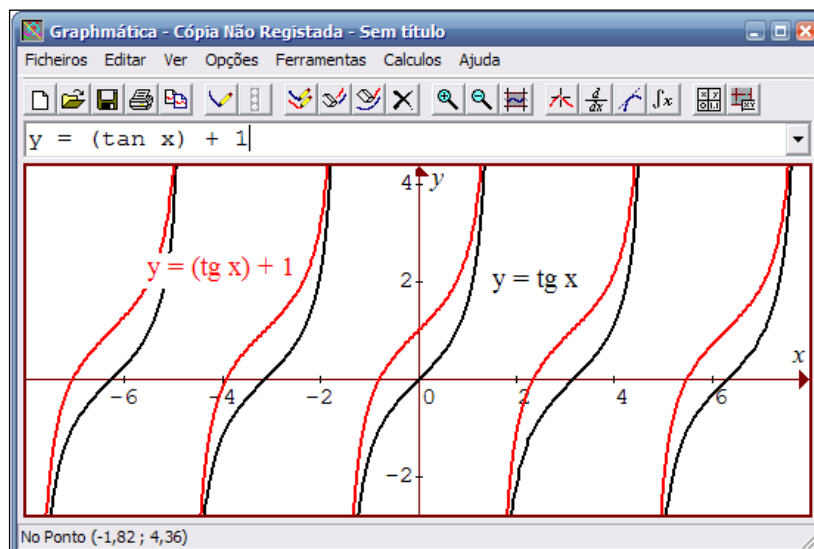


Figura 4.38: Análise gráfica das funções $y = \operatorname{tg} x$ e $y = (\operatorname{tg} x) + 1$.

Observe que cada ponto do gráfico de $y = (\operatorname{tg} x) + 1$ tem ordenada igual a uma unidade a mais do que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = \operatorname{tg} x$. Ou, seja, o gráfico de $y = (\operatorname{tg} x) + 1$ é o resultado de uma translação vertical de 1 unidade da curva que é o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.

Utilizando outros valores para k , ou seja, a conclusão é análoga para qualquer outro valor de k : o gráfico de $y = \operatorname{tg} x + k$ sofre uma translação vertical de k unidades, quando comparado ao gráfico de $y = \operatorname{tg} x$. Portanto, o gráfico de $y = \operatorname{tg} x + k$ “sobe” ou “desce” em relação à posição inicial de, conforme $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente.

2ª SITUAÇÃO: Seja $y = a \cdot \operatorname{tg} x$, onde a é uma constante real não nula. Pois se $a = 0$, a função obtida não será a função tangente, mas sim a função constante real nula. Atribuindo valores ao coeficiente a , por exemplo, $a = 2$ e $a = 1/2$ (valores positivos) e $a = -1$ (valores negativos), desse modo, pode-se chegar a uma conclusão geral.

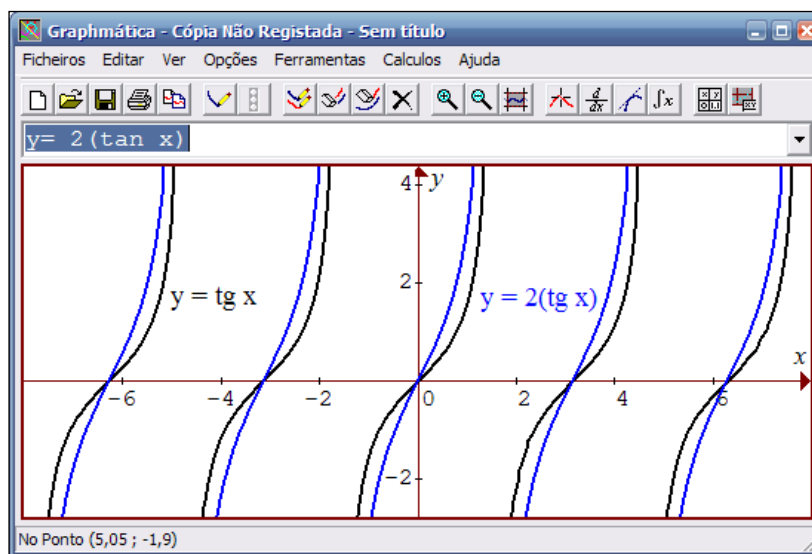


Figura 4.39: Análise gráfica das funções $y = \text{tg } x$ e $y = 2(\text{tg } x)$.

No gráfico de $y = 2(\text{tg } x)$, cada ponto, a ordenada é o dobro daquela do ponto de mesma abscissa do gráfico de $y = \text{tg } x$. Dessa forma, o coeficiente 2 na expressão da função provoca uma mudança de inclinação na curva que é seu gráfico em comparação ao gráfico da função inicial. As raízes, evidentemente, continuam as mesmas.

No gráfico de $y = 1/2(\text{tg } x)$, cada ponto do gráfico terá ordenada igual à metade daquela do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = \text{tg } x$. Para qualquer outro valor positivo do coeficiente a , a conclusão é semelhante: a função tangente muda de inclinação.

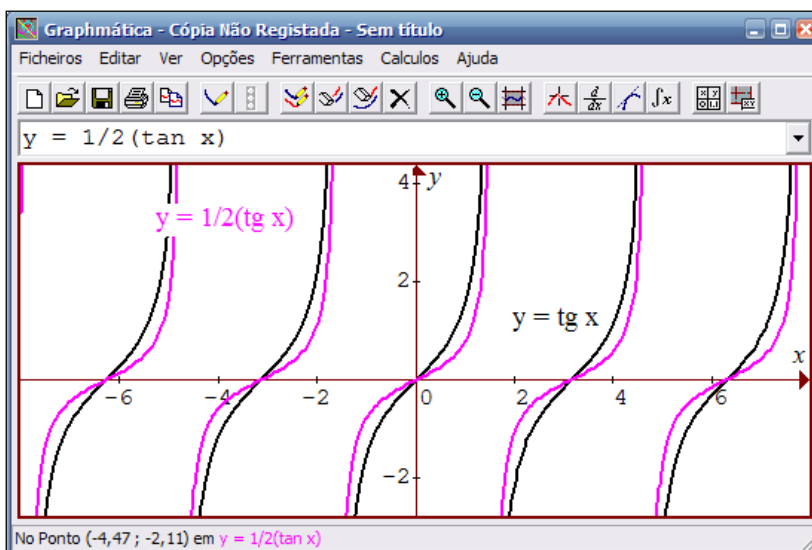


Figura 4.50: Análise gráfica das funções $y = \text{tg } x$ e $y = 1/2(\text{tg } x)$.

No caso de a ser negativo observaremos apenas a situação mais simples de $y = -\text{tg } x$. Assim, será fácil chegar a uma conclusão geral.

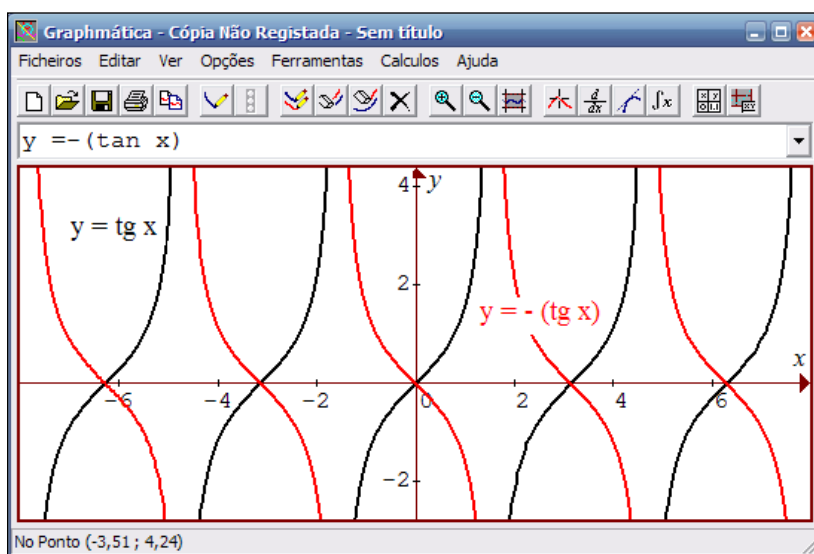


Figura 4.51: Análise gráfica das funções $y = \tan x$ e $y = -(\tan x)$.

Cada ponto desse gráfico tem ordenada igual ao oposto do valor da ordenada do ponto de mesma abscissa em $y = \tan x$. O seu gráfico é, portanto, uma curva simétrica, em relação ao eixo horizontal à curva que é o gráfico de $y = \tan x$. Analogamente, podemos fazer o gráfico considerado para qualquer valor negativo de a , observando a simetria em relação ao eixo horizontal, quando fazemos a comparação com o gráfico da função oposta.

Assim, o coeficiente a , em $y = a \cdot \tan x$, tem o papel de mudar a inclinação do gráfico da função $y = \tan x$. Quando $a > 1$, a inclinação aumenta, quando $0 < a < 1$, a inclinação diminui. Quando o coeficiente a é negativo, o gráfico de $y = a \cdot \tan x$ sofre uma reflexão em relação ao eixo horizontal, quando comparado ao gráfico da função oposta.

3ª SITUAÇÃO: Seja $y = \tan(x + m)$, onde m é um número real não nulo. Para essa análise façamos $m = 1$.

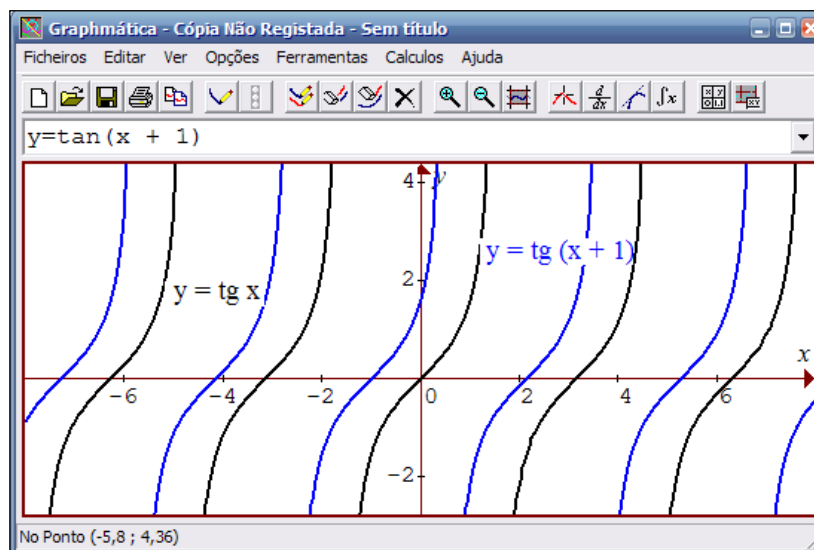


Figura 4.52: Análise gráfica das funções $y = \tan x$ e $y = \tan(x + 1)$.

Em $y = \tan x$ temos que $(0, 0)$ pertence ao gráfico, enquanto que, em $y = \tan(x + 1)$ é o mesmo que o “papel desempenhado” por $x = 0$ em $y = \tan x$. Assim, o gráfico de $y = \tan(x + 1)$ sofreu uma translação horizontal à esquerda de -1 quando comparado ao gráfico de $y = \tan x$.

Para qualquer outro valor de m não-nulo, a análise é semelhante, quando fazemos a comparação com o gráfico da função mais simples, $y = \tan x$, sempre ocorre uma translação horizontal de $-m$ no gráfico em relação à $y = \tan x$.

4ª SITUAÇÃO: Seja $y = \tan(bx)$, onde b é uma constante real não-nula. Para isso vejamos quando $b = 2$ e $b = \frac{1}{2}$.

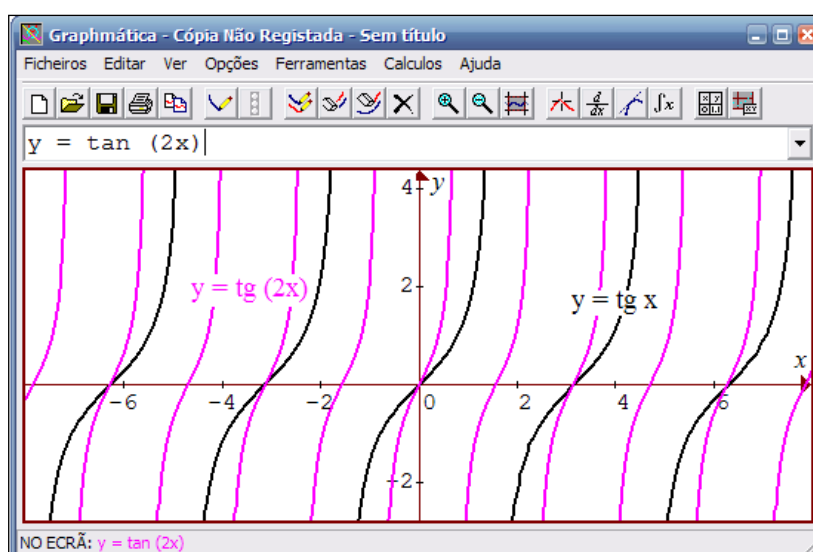


Figura 4.53: Análise gráfica das funções $y = \tan x$ e $y = \tan(2x)$.

Aquilo que logo chama a atenção é o fato de que o período de $y = \operatorname{tg}(2x)$ é justamente a metade daquele de $y = \operatorname{tg} x$.

Por outro lado, podemos examinar o gráfico de $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$ em comparação ao gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.

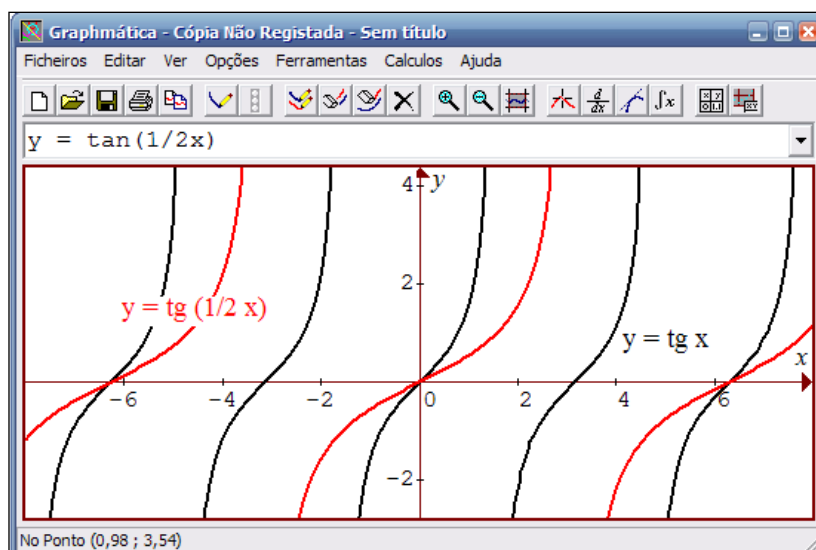


Figura 4.54: Análise gráfica das funções $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{tg}(1/2 x)$.

Neste caso, o período de $y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$ é justamente o dobro daquele de $y = \operatorname{tg} x$.

De modo geral, a ação do coeficiente **b** é a de provocar mudança no período da função: enquanto $y = \operatorname{tg} x$ é uma função de período π , $y = \operatorname{tg}(bx)$ é uma função de período $\frac{\pi}{b}$, para $b > 0$.

Entretanto, é preciso analisar o que acontece quando **b** é negativo. Para isto, basta observar que a função tangente é uma função ímpar e, conseqüentemente, $\operatorname{tg}(-bx) = -\operatorname{tg}(bx)$.

Dessa maneira, o gráfico da função $y = \operatorname{tg}(-bx)$ é o simétrico em relação ao gráfico de $y = \operatorname{tg}(bx)$, com relação ao eixo vertical.

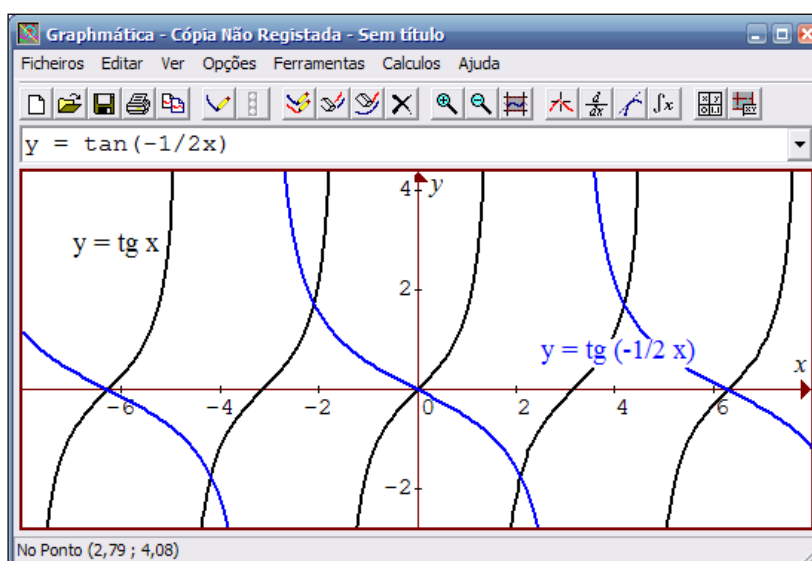


Figura 4.55: Análise gráfica das funções $y = \text{tg } x$ e $y = \text{tg}(-1/2 x)$.

4.5 FUNÇÃO COTANGENTE

Cotangente de um arco – Considere a circunferência trigonométrica e a reta c paralela ao eixo Ox traçada pelo ponto B . A essa reta, com a mesma orientação do eixo Ox , damos o nome de eixo das cotangentes.

Traçando uma reta que passa pelo centro O e por um ponto P qualquer da circunferência trigonométrica, essa reta OP , interceptará o eixo das cotangentes num ponto T , determinando o segmento orientado BT .

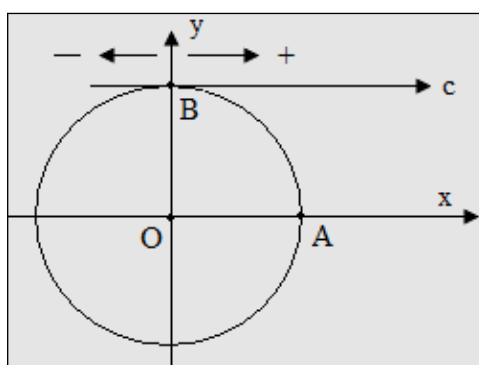


Figura 4.56: Eixo das cotangentes.

Assim, a cotangente do arco AP é a medida algébrica do segmento orientado BT : $\cotg AP = BT$. Se associarmos o arco AP um número real x tal que $m(AP) = x \text{ rad}$, podemos dizer que:

De modo geral, não é definida a cotangente do arco trigonométrico $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Definição 4.4: Chamamos de função cotangente a função f definida de $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ em \mathbb{R} que a cada número real $x \neq k\pi$ associa a cotangente desse número:

$$f(x) = \cotg x.$$

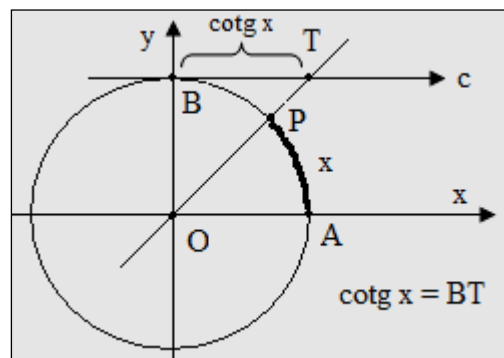


Figura 4.57: Cotangente de um arco.

Dessa forma: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Note que, no primeiro e terceiro quadrantes, a função $\cotg x$ varia de $+\infty$ até 0 e, no segundo e quarto quadrantes, de 0 até $-\infty$. Assim: $Im(\cotg x) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

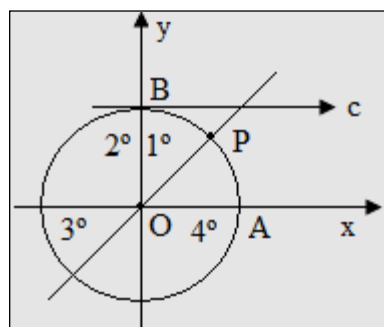


Figura 4.58: Circunferência trigonométrica.

4.5.1 Sinal da Função Cotangente

Observando a circunferência trigonométrica, podemos analisar o sinal da função cotangente. Vemos que a função é positiva para os valores do 1º e do 3º quadrantes e negativa para valores do 2º e do 4º quadrantes.

$$\text{A } \cotg x \text{ é nula para } x = \frac{\pi}{2} \text{ rad e } x = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

(ou, de forma geral, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$).

$\cotg x$ não está definida para $x = 0$ e $x = \pi$ (ou, de forma geral, para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

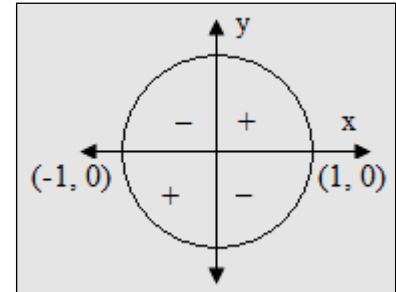


Figura 4.59: Sinal da função cotg.

4.5.2 Relação Entre Cotangente, Seno e Cosseno de um Arco Trigonométrico

Observe a figura 4.60:

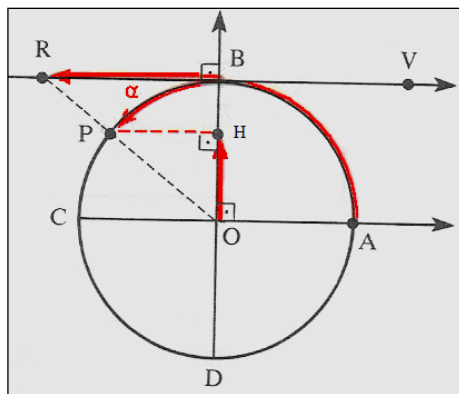


Figura 4.60: Relação da cotg com sen, cos e tg.

Qualquer que seja $\alpha \in D(\cotg)$, se

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos OBR e

OHP semelhantes entre si. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|BR|}{|HP|} &= \frac{|OB|}{|OH|} \Rightarrow \frac{|\cot g \alpha|}{|\cos \alpha|} = \frac{1}{|\sin \alpha|} \Rightarrow |\cot g \alpha| = \\ &= \frac{|\cos \alpha|}{|\sin \alpha|}. \end{aligned}$$

A análise dos sinais da $\cotg \alpha$, $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ nos possibilita escrever a relação sem módulos: $\cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Vamos examinar o que ocorre quando $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P \equiv B \Rightarrow \cot g \alpha = 0, \cos \alpha = 0, \sin \alpha = 1 \\ ou \\ P \equiv D \Rightarrow \cot g \alpha = 0, \cos \alpha = 0, \sin \alpha = -1 \end{array} \right\}.$$

A substituição desses valores nos mostra a validade de $\cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ também

para

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Portanto, } \cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como consequência imediata, temos: $\cot g \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

4.5.3 Gráfico da Função Cotangente

Com base nas relações trigonométricas nos triângulos retângulos, obtemos os valores:

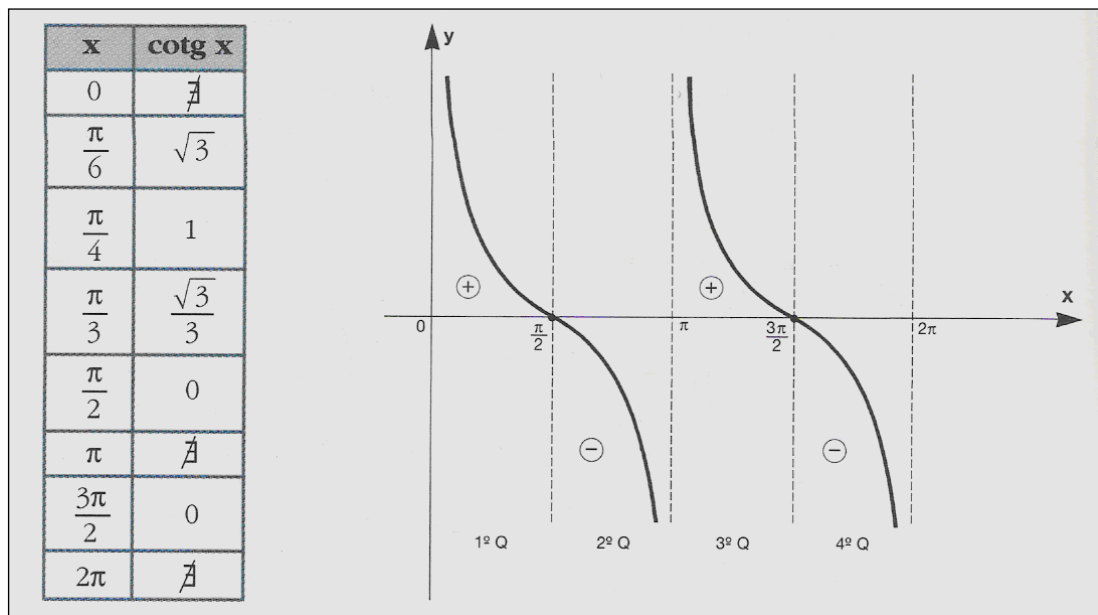


Figura 4.61: Gráfico da função

Observando o gráfico podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.4: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1°	2°	3°	4°
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	-	+	-
VARIAÇÃO	$+\infty \downarrow 0$	$0 \downarrow -\infty$	$+\infty \downarrow 0$	$0 \downarrow -\infty$
	decrecente	decrecente	decrecente	decrecente

4.5.4 Período da Função Cotangente

Observando o gráfico da figura 4.61, verificamos que o comportamento da função $f(x) = \cotg x$ no primeiro e segundo quadrantes é o mesmo que no terceiro e quarto quadrantes. Ou seja, $\cotg x = \cotg(x + \pi) = \cotg(x + 2\pi) = \dots = \cotg(x + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, a função é periódica, pois seus valores se repetem a cada meia volta, de π em π , e na mesma ordem. Portanto, o período é: $p(\cotg x) = \pi$.

4.5.5 A Função Cotangente é Ímpar

Seja $f(x) = \cotg x$, queremos mostrar que $f(-x) = -\cotg x$. Porém, temos que

$$\cotg x = \frac{1}{\tg x} \Rightarrow \cotg x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Rightarrow \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}. \text{ Deste modo, podemos fazer } f(-x) =$$

$$\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}, \text{ como já demonstrado anteriormente temos: } f(-x) = \frac{\cos x}{-\sin x} \Rightarrow f(-x) =$$

$$-\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow f(-x) = -f(x). \text{ Logo, a função cotangente é ímpar. Graficamente temos:}$$

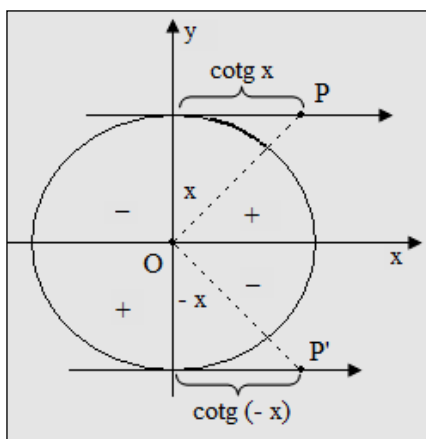


Figura 4.62: A função \cotg é ímpar.

4.5.6 Injetividade e Sobrejetividade

A função cotangente não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

$$\text{Ex) } \cot g \frac{\pi}{2} = \cot g \frac{3\pi}{2} = 0.$$

A imagem da função cotangente é os reais, isto é, para todo y real existe um x real tal que $\cot g x = y$.

De fato, dado um $y \in \mathbb{R}$, consideremos o eixo das cotangentes o ponto T tal que $\overline{BT} = y$, construindo a reta OT , observamos que ela intercepta o ciclo trigonométrico em dois pontos P e P' , imagens dos reais x cuja cotangente é y . Logo, a função cotangente é sobrejetiva.

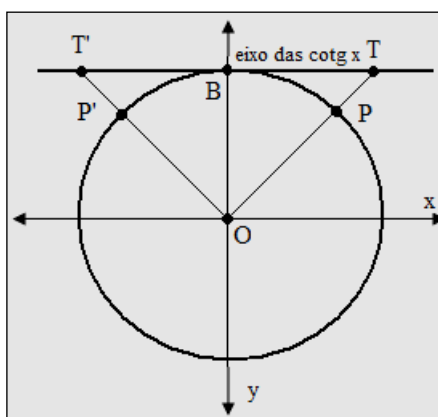


Figura 4.63: A função $\cotg x$ é sobrejetiva.

4.5.7 Análise Gráfica da Função Cotangente

A análise gráfica do comportamento de uma função cotangente mais geral, $y = a \cotg (bx + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \cotg x$, podem ser verificadas de forma análoga as situações 1, 2, 3 e 4 apresentadas na função tangente. Lembrando que tais situações devem respeitar o comportamento do gráfico e as propriedades da função cotangente.

4.6 FUNÇÃO SECANTE E COSSECANTE

Para cada ponto P do ciclo trigonométrico, $P \neq A$, $P \neq B$, $P \neq C$ e $P \neq D$, a reta t , tangente ao ciclo em P , intercepta Ox em um único ponto S e Oy em um único ponto Q .

Indicando por α um número correspondente a P , podemos associar a α , a abscissa de S e a ordenada de Q .

Notemos que:

Existe o ponto $S \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

Existe o ponto $Q \Leftrightarrow \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

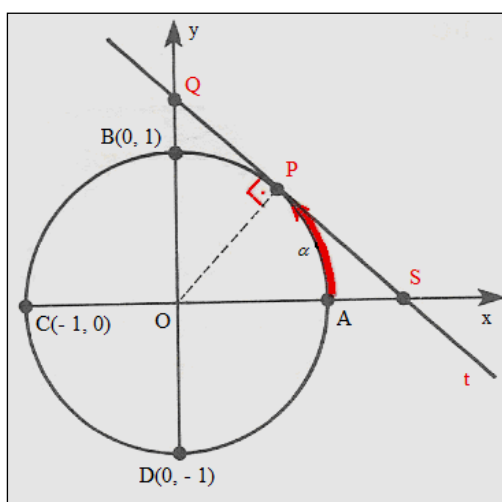


Figura 4.64: Reta tangente ao ciclo trigonométrico.

4.6.1 Função Secante

Definição 4.5: Função secante é a função, definida por $D(sec) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, que a todo número real α associa a abscissa do ponto S , interseção de Ox com a reta t , tangente ao ciclo trigonométrico em P , onde P é a imagem do α no ciclo.

Dizemos, também, que o segmento OS é a secante de $A\hat{O}P$ ou do arco AP .

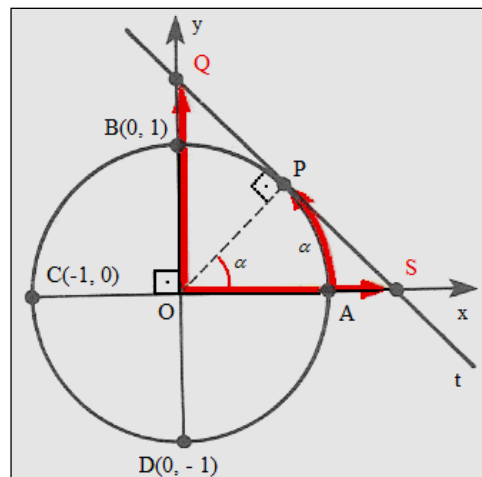


Figura 4.65: Função secante.

4.6.1.1 Sinal da Função Secante

O sinal da função $f(\alpha) = \sec \alpha$ é o mesmo da função cosseno, pois

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ assim:}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec \alpha = 2 \quad \text{e} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sec \alpha = -2.$$

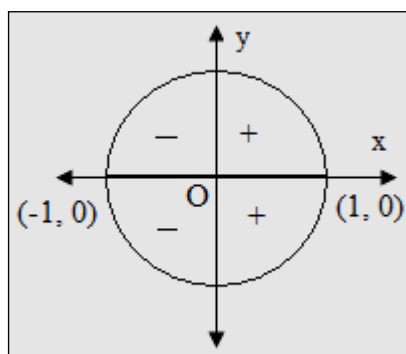


Figura 4.66: Sinal da função secante.

4.6.1.2 Gráfico da Função Secante

Sendo $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, vamos calcular alguns valores notáveis:

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}; \sec \frac{\pi}{3} = 2.$$

A função secante e a função cosseno se comportam, graficamente, de maneira inversa: quando uma é crescente, a outra é decrescente, e vice-versa. Quando a função secante só é definida por $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, com base no quadro, obtemos o seguinte gráfico, como mostra a figura 4.67.

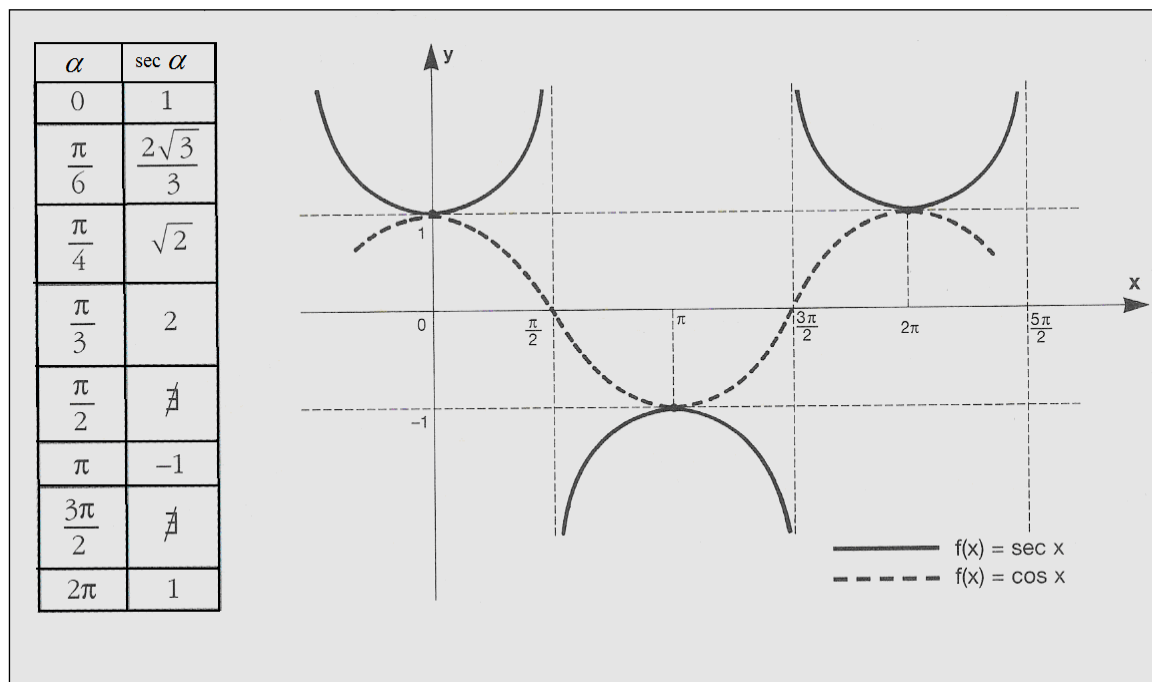


Figura 4.67: Gráfico da função secante.

Pela definição, $\cos \alpha \neq 0$, então $D(\sec \alpha) = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$. E, observando o gráfico, $Im(\sec \alpha) =] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[= \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1 \}$.

Observando o gráfico da função podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.5: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1°	2°	3°	4°
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	-	-	+
VARIAÇÃO	$1 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow -1$	$-1 \downarrow -\infty$	$+\infty \downarrow 1$
	crescente	crescente	decrecente	decrecente

4.6.1.3 Período da Função Secante

Observando o gráfico de $f(\alpha) = \sec \alpha$, verificamos que o comportamento da função para a primeira volta é o mesmo que para a segunda volta, e assim por diante. Então, $\sec \alpha = \sec(\alpha + 2\pi) = \sec(\alpha + 4\pi) = \dots = \sec(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, a função secante é periódica, pois seus valores se repetem a cada volta, de 2π em 2π , e na mesma ordem. Portanto, o seu período é: $p(\sec \alpha) = 2\pi$.

4.6.1.4 A Função Secante é Par

Seja $f(\alpha) = \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, queremos mostrar que $f(\alpha) = f(-\alpha)$. Deste modo, podemos fazer $f(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)}$, como já demonstrado anteriormente temos $f(-\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}$. Assim, $f(\alpha) = f(-\alpha)$, logo, a função secante é par.

4.6.1.5 Injetividade e Sobrejetividade

A função secante não é injetiva, pois para valores diferentes de x , temos o mesmo $f(x)$.

Ex) $\sec 0 = \sec 2\pi = 1$.

A imagem da função secante, conforme figura 4.66, é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, isto é, para todo real y , com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x real tal que a $\sec x = y$.

De fato, a função secante não é sobrejetiva, pois $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$, isto é sua imagem não é igual ao contradomínio.

4.6.1.6 Análise Gráfica da Função Secante

A análise gráfica do comportamento de uma função secante mais geral, $y = a \sec(bx + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \sec \alpha$, podem ser verificadas de forma análoga as situações 1, 2, 3 e 4 apresentadas na função cosseno. Lembrando que tais situações devem respeitar o comportamento do gráfico e as propriedades da função secante.

4.6.2 Função Cossecante

Definição 4.6: Função cossecante é a função $f(\alpha) = \operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$ ($\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$), que a todo número α associa a ordenada do ponto Q , intersecção de Oy com a reta t , tangente ao ciclo trigonométrico em P , onde P é a imagem de α no ciclo.

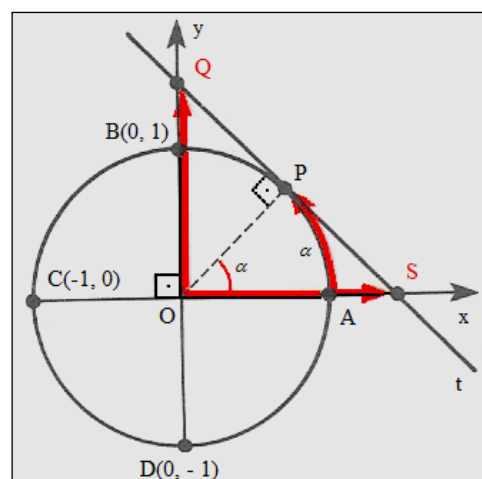


Figura 4.68: Função cossecante.

Dizemos, também, que o segmento OQ é a cossecante do $A\hat{O}P$ ou do arco AP .

4.6.2.1 Sinal da Função Cossecante

O sinal de $f(\alpha) = \operatorname{cossec} \alpha$ é dado pelo sinal da função seno, pois $\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = 4;$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -\sqrt{2}.$$

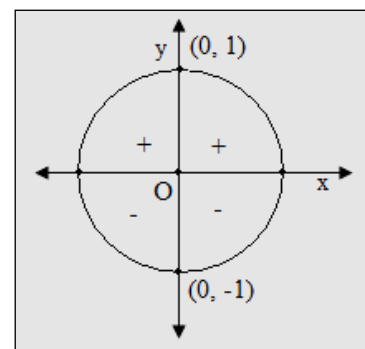


Figura 4.69: Sinal da função cossec.

4.6.2.2 Gráfico da Função Cossecante

Sendo $\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, vamos calcular alguns valores notáveis:

$$\operatorname{cossec} \frac{\pi}{6} = 2; \operatorname{cossec} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}; \operatorname{cossec} \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

A função cossecante e a função seno se comportam, graficamente, de maneira inversa, quando uma é crescente, a outra é decrescente, e vice-versa.

Como a função cossecante só é definida para $\alpha \neq k\pi, \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, com base no quadro abaixo, obtemos o seguinte gráfico, como mostra a figura 4.70.

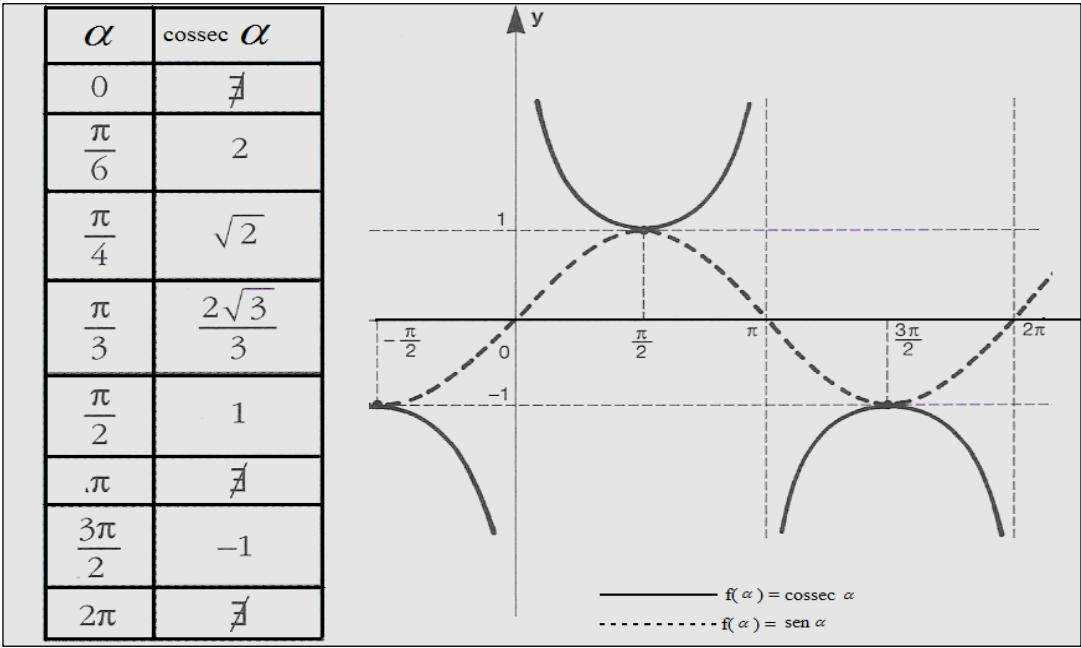


Figura 4.70: Gráfico da função cossecante.

De acordo com a definição, $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$, logo, $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então $D(\operatorname{cosec} \alpha) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. E, do gráfico, $\operatorname{Im}(\operatorname{cosec} \alpha) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.

Observando o gráfico da função podemos fazer algumas considerações importantes:

Quadro 4.6: Estudo do sinal e variação de quadrantes.

QUADRANTE	1º	2º	3º	4º
ARCO	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
SINAL	+	+	-	-
VARIAÇÃO	$+\infty \downarrow 1$	$1 \uparrow +\infty$	$-\infty \uparrow -1$	$-1 \downarrow -\infty$
	decrecente	crescente	crescente	decrecente

4.6.2.3 Período da Função Cossecante

Observando o gráfico de $f(\alpha) = \operatorname{cossec} \alpha$, verificamos que o comportamento da função para a primeira volta é o mesmo para a segunda volta, e assim por diante. Dessa forma, $\operatorname{cossec} \alpha = \operatorname{cossec}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{cossec}(\alpha + 4\pi) = \dots = \operatorname{cossec}(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, a função cossecante é periódica, pois seus valores se repetem a cada volta de 2π em 2π , e na mesma ordem. Portanto, o seu período é: $p(\operatorname{cossec} \alpha) = 2\pi$.

4.6.2.4 A Função Cossecante é Ímpar

Seja $f(\alpha) = \operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$, queremos mostrar que $f(\alpha) = -f(-\alpha)$. Deste modo, podemos fazer $f(-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$, como já foi demonstrado anteriormente temos que $f(-\alpha) = -\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$. Assim, $f(\alpha) = -f(-\alpha)$, logo, a função cossecante é ímpar.

4.6.2.5 Injetividade e Sobrejetividade

A função cossecante não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

$$\text{Ex) } \operatorname{cossec} \frac{\pi}{6} = \operatorname{cossec} \frac{5\pi}{6} = 2.$$

A imagem da função cossecante, conforme pode ser observado na figura 4.69, é $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, isto é, para todo y , com $y \leq -1$ ou $y \geq 1$, existe um x tal que $\operatorname{cossec} x = y$.

De fato, a função cossecante não é sobrejetora, pois $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.

4.6.2.6 Análise Gráfica da Função Cossecante

A análise gráfica² do comportamento de uma função cossecante mais geral, $y = a \operatorname{cossec}(b\alpha + m) + k$, onde a , b , m e k pertencem ao conjunto dos números reais, quando comparado ao gráfico da função $y = \operatorname{cossec} \alpha$, podem ser verificadas de forma análoga as situações 1, 2, 3 e 4 apresentadas na função seno. Lembrando que tais situações devem respeitar o comportamento do gráfico e as propriedades da função cossecante.

4.6.3 Relação Entre Secante e Cosseno e Entre Cossecante e Seno

Seja P a imagem no ciclo trigonométrico de um número real $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Então, existem os triângulos OPS e OHP semelhantes entre si. Logo:

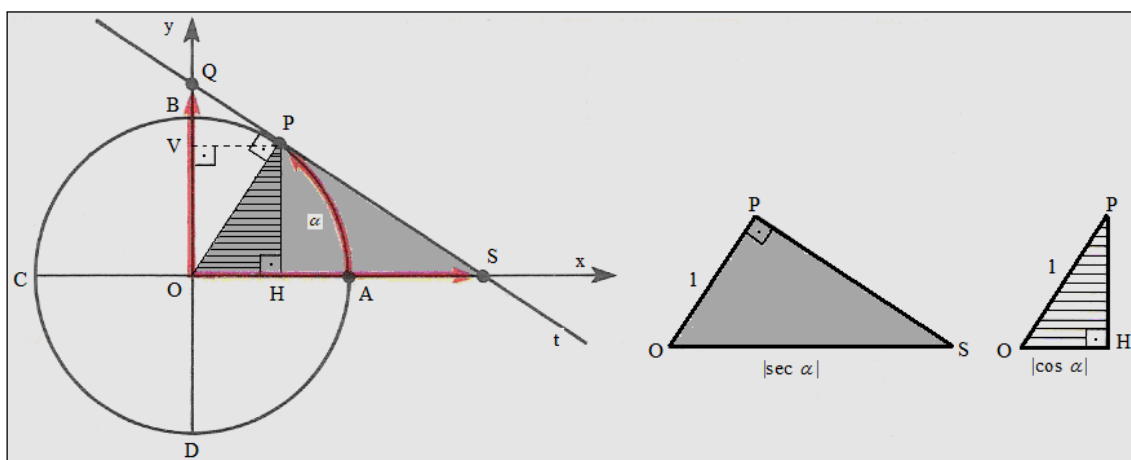


Figura 4.71: Relação entre secante e cosseno.

$$\frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OH}|} \Rightarrow |\sec \alpha| = \frac{1}{|\cos \alpha|}$$

A análise dos sinais nos permite escrever a relação sem módulos:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

² O estudo dos gráficos das funções de que tratamos durante este trabalho, auxilia na resolução de equações ou inequações, pois as operações algébricas a serem realizadas adquirem um significado que é visível nos gráficos esboçados no mesmo referencial cartesiano.

Vamos examinar o que ocorre quando $\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \equiv A \Rightarrow \sec \alpha = 1, \cos \alpha = 1 \\ ou \\ S \equiv C \Rightarrow \sec \alpha = -1, \cos \alpha = -1 \end{array} \right\}$$

A substituição desses valores nos mostra a validade de $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, também,

nesse caso particular. Portanto:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

De forma análoga, da semelhança dos triângulos OPQ e OVP , concluímos:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho, buscou-se, uma outra abordagem para o ensino de Funções Circulares, primeiro, analisando os livros didáticos no que se refere a este assunto. Notamos que os livros não trazem determinadas demonstrações que são importantes para compreensão do aluno. Entendemos que, nesse sentido, o nosso trabalho pode auxiliar o leitor. Também, falta por parte dos livros uma melhor caracterização destas funções. Acredita-se, que o principal entrave no ensino das funções circulares, está relacionado com a forma com que os livros didáticos tratam o assunto e principalmente pela falta de acesso que o professor tem em relação a essas caracterizações, assim, o presente trabalho dá uma nova ênfase a este estudo, fazendo comparações, mostrando ao leitor observações importantes, análises e curiosidades em relação a estas funções.

Outro ponto que merece destaque é a falta de enfoque dada a parte histórica sobre a trigonometria, pois, entendemos que estudar o passado e as implicações que este conteúdo teve, são de fundamental importância para que o aluno consiga compreender as aplicações que este conteúdo têm nos dias atuais. Assim, a parte histórica deste trabalho, pode mostrar com detalhes o surgimento da trigonometria, suas principais aplicações, os principais matemáticos envolvidos nesse processo e a evolução que este estudo teve ao longo dos séculos.

O propósito foi analisar as funções circulares e suas respectivas peculiaridades, com o objetivo principal de mostrá-las ao leitor, para que tais peculiaridades se tornem facilitadores no processo de construção de idéias, para o entendimento das funções circulares. Neste sentido, verificamos que a utilização de novas ferramentas em sala é incentivadora no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. O uso de um laboratório de informática pode e deve ser utilizado para explorar as potencialidades dos alunos, a capacidade de observação, interpretação e análise crítica dos mesmos.

Para finalizar, esperamos ter contribuído de alguma forma, para melhorar o procedimento de ensino das Funções Circulares, fornecendo pistas para que outras situações sejam exploradas e questionadas, estimulando os professores a repensarem sua prática pedagógica.

6 REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga**: coleção fundamentos da matemática elementar. São Paulo: SBM, 1984.

BRIGHENTI, Maria José Lourenção. Alterando o Ensino da Trigonometria em Escolas Públicas de Nível Médio: A representação de algumas Professoras. In: **Zetetikê**, Campinas: CEPEN-FE/UNICAMP, v. 8 – nº13/14, p. 51-79, Jan/Dez. de 2000.

BRITO, Arlete de Jesus; MOREY, Bernadete Barbosa. Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. In: **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, nº 1, p. 65-70, Jan/Jun. de 2004.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5ª ed. Gradiva, 2003.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. A História da Trigonometria: Educação Matemática em Revista. In: **Revista SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática)**. São Paulo, ano 10; ISSN 15173941, p. 60 – 69 de 01/03/2003.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 7ª ed. São Paulo: Papirus, 1996. – (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática para o Ensino Médio**. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2004.

EVES, Howard. **Geometria**: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. v. 3. São Paulo: Atual, 1992.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar**: conjuntos e funções. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

LINDEGGER, Luiz Roberto de Moura. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo**: uma proposta a partir da manipulação de modelos. 2000, 204 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

MENDES, Iran Abreu. História no Ensino da Matemática: o caso da trigonometria. In: **Revista Informat**. Lisboa: Secretária de Ensino Secundário, Ministério da Educação, v.07, p. 04 – 05, 2001.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS: Matemática: Secretaria da Educação do Ensino Médio. Brasília: MEC, Sef, 2001.

REGO, Tereza Cristina. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. 10ª ed., Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: A questão da democracia. São Paulo: Papirus, 2001.