

El Postu ante
colección

Editorial
San
Marcos

Álgebra

COLECCIÓN EL POSTULANTE

ÁLGEBRA

Editorial

*San
M
arcos*

ÁLGEBRA - COLECCIÓN EL POSTULANTE
Salvador Timoteo

© Salvador Timoteo

Diseño de portada: Miguel Bendezú
Composición de interiores: Blanca Llanos
Responsable de edición: Alex Cubas

© Editorial San Marcos E. I. R. L., editor
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Telefax: 331-1522
RUC 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Primera edición: 2007
Segunda edición 2013
Tiraje: 1000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Registro N.° 2012-11997
ISBN 978-612-302-919-7
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001200780

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
sin previa autorización escrita del autor y del editor.

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 974, Lima
Telefax: 424-6563
E-mail: ventaslibreria@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Composición, diagramación e impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangamarca, S. J. L.
RUC 10090984344

ÍNDICE

Leyes de exponentes	9
Polinomios	17
Productos notables	23
División de polinomios	28
Factorización	37
Fracciones algebraicas	43
Binomio de Newton	49
Radicación	54
Números complejos	60
Ecuaciones	64
Desigualdades e inecuaciones	74
Progresiones	85
Logaritmos	90

PRESENTACIÓN

Editorial San Marcos presenta al público la Colección El Postulante, elaborada íntegramente pensando en las necesidades académicas de los jóvenes que aspiran a alcanzar una vacante en las universidades, institutos y centros superiores de estudio a nivel nacional.

La Colección El Postulante reúne los temas requeridos por los prospectos de admisión, los cuales son desarrollados didácticamente, con teoría ejemplificada y ejercicios propuestos y resueltos, de alto grado de dificultad, con los cuales se busca dotar a los jóvenes de los conocimientos básicos necesarios para enfrentar no solo los diversos exámenes de admisión, sino afianzar los saberes de su formación escolar y alcanzar una formación integral que les permita, en el futuro próximo, desarrollar una vida universitaria exitosa.

Finalmente, deseamos hacer un reconocimiento al staff de docentes liderados por Salvador Timoteo, Pedro de Castro, Jorge Solari y Nathali Falcón, profesores de amplia trayectoria en las mejores academias de nuestro país, quienes han entregado lo mejor de su experiencia y conocimientos en el desarrollo de los contenidos.

—EL EDITOR—

LEYES DE EXPONENTES

POTENCIACIÓN

Es aquella operación matemática donde, dados dos elementos llamados base (b) y exponente (n) se calcula un tercer elemento llamado potencia.

Notación:

$$b^n = P \quad \begin{cases} b: \text{base, } b \in \mathbb{R} \\ n: \text{exponente, } n \in \mathbb{Z} \\ P: \text{potencia, } P \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ejemplos:

- En $5^4 = 625$, la base es 5, el exponente es 4 y la potencia es 625.
- a^3 , aquí a es la base, 3 es el exponente y a^3 es una potencia indicada.

PRINCIPALES EXPONENTES

Exponente natural. Si n es cualquier entero positivo y b es un número real, definimos.

$$b^n = \begin{cases} b & \text{si } n = 1 \\ \underbrace{b \times b \times b \dots b}_{n \text{ veces}} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $6^1 = 6$
- $\sqrt{3} = \sqrt{3}^1$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
- $(-2)^7 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -128$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$
- $-3^4 = -(3^4) = -81$
- $-2^3 = -(2^3) = -8$

Exponente cero. Si a es cualquier número real no nulo,

$$a^0 = 1$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1; (-7)^0 = 1; (\sqrt{5})^0 = 1; \left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Nótese que no hemos definido 0^0 , esta expresión no tiene un significado útil.

Exponente negativo Si x es un número real no nulo, y si n es un entero positivo, definimos

$$x^{-n} = 1/x^n$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3^{-3} &= \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} & \bullet \quad (-2)^{-3} &= \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} \\ \bullet \quad 4^{-2} &= \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} & \bullet \quad (-3)^{-2} &= \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Si x e y son reales no nulos, n es un entero positivo entonces $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\ \bullet \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} &= 3^3 = 27 \\ \bullet \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} &= \left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{625}{16} \end{aligned}$$

Nótese que no hemos definido 0^{-n} , esta expresión no tiene sentido:

pues si: $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \nexists$ entonces 0^{-n} no existe.

Teorema. Si x e y son números reales y m, n son enteros, tal que x^m, x^n, y^n existen, entonces

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^m x^n &= x^{m+n} & \bullet \quad \frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n}, x \neq 0 \\ \bullet \quad (xy)^n &= x^n y^n & \bullet \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n}, y \neq 0 \\ \bullet \quad (x^m)^n &= x^{mn} & \bullet \quad \frac{x}{y^n} &= xy^{-n} \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad 6^3 \times 6^{-4} \times 6^2 &= 6^{3+(-4)+2} = 6^1 = 6 \\ \bullet \quad \frac{3^{-2}}{3^{-3}} &= 3^{-2-(-3)} = 3^1 = 3 \\ \bullet \quad \frac{27^2}{9^2} &= \left(\frac{27}{9}\right)^2 = 3^2 = 9 \\ \bullet \quad 3^{n+2} &= 3^n \times 3^2 = 9 \times 3^n \\ \bullet \quad 3(25^n) &= 3(5^{2n}) = 3(5^n)^2 \end{aligned}$$

Si b es un número real y m, n, p son enteros entonces:

$$b^{m \cdot n^p} = b^{m(n^p)}$$

Por ejemplo:

$$3^{2 \cdot 2^3(0^5)} = 3^{2 \cdot 2^3(3^0)} = 3^{2 \cdot 2^1} = 3^{2^2} = 3^4 = 81$$

RADICACIÓN EN \mathbb{R}

$$\sqrt[n]{a} = b \begin{cases} \sqrt{} \text{ es el símbolo radical} \\ n \text{ es el índice; } n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \\ a \text{ es el radicando (cantidad radical)} \\ b \text{ es la raíz enésima} \end{cases}$$

Por ejemplo, en $\sqrt[5]{32} = 2$, el índice es 5, el radicando es 32 y la raíz quinta es 2.

Observaciones:

1. Si $a > 0$ y n es un entero positivo, $n \geq 2$; entonces existe un único real $b > 0$, tal que $b^n = a$. El número b se llama raíz enésima de a y se denota por $\sqrt[n]{a}$.
2. Si $a < 0$ y n es un entero positivo impar $n \geq 3$, entonces existe un $b < 0$, tal que $b^n = a$. En este caso escribimos $b = \sqrt[n]{a}$ y la llamamos la raíz enésima de a .
3. Finalmente $\sqrt[0]{0} = 0$

De las definiciones

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solo si } b^n = a; \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

Cuando $n = 2$, es usual escribir \sqrt{a} en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y llamar a \sqrt{a} la raíz cuadrada de a . Al número $\sqrt[3]{a}$ se le llama la raíz cúbica de a .

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{16} = 2$, pues: $2^4 = 16$
- $\sqrt[4]{81} = 3$, pues: $3^4 = 81$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$, pues: $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt{9} = 3$, pues: $3^2 = 9$

Nótese que no hemos definido $\sqrt[n]{a}$ cuando $a < 0$ y n es un entero positivo par. La razón de esto consiste en que para todo número real b , b^n es no negativo cuando n es par.

Por ejemplo: $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-5}$; $\sqrt[6]{-100}$; ...; $\sqrt[2n]{-}$

Estas expresiones no están definidas en \mathbb{R} (no existen), estas están en el campo de los imaginarios. Es importante observar que $\sqrt[n]{a}$ cuando existe, es un número real único.

Teorema. Si n es un natural, $n \geq 2$, x e y son reales tales que $\sqrt[n]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$ existen, entonces

- $\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ • $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$; si $y \neq 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$; si m es una natural, $m \geq 2$, y las raíces indicadas existen.
- $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x; & n \text{ es impar} \\ |x|; & n \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplos:

- $\sqrt[4]{8} \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{8 \times 32} = \sqrt[4]{256} = 4$
- $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[6]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
- $\sqrt{(-4)^2} = |4| = 4$

EXPONENTES RACIONALES

1. Si x es un número real y n es un natural ($n \geq 2$), entonces definimos:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad (\text{suponiendo que } \sqrt[n]{x} \text{ existe})$$

Ejemplos:

- $4^{1/2} = \sqrt[2]{4} = 2 = 2$
 - $9^{0.5} = 9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$
 - $64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$
 - $81^{1/4} = \sqrt[4]{81} = 3$
 - $27^{0.\bar{3}} = 27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$
 - $16^{0.25} = 16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$
2. Sea m/n un número racional irreducible y n un natural ($n \geq 2$). Luego, si x es un número real, tal que $\sqrt[n]{x}$ existe, definimos.

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

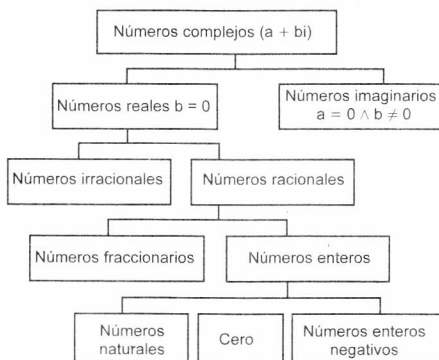
Ejemplos:

$$3125^{2/5} = (\sqrt[5]{3125})^2 = (5)^2 = (5)^2 = 25$$

- $(-27)^{2/3} = (\sqrt[3]{-27})^2 = (-3)^2 = 9$
- $4^{-5/2} = (\sqrt{4})^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
- $640,6 = 642/3 = \sqrt[3]{64^2} = 42 = 16$
- $85/3 = (\sqrt[3]{8})^5 = (2)5 = 32$

Nota:

Conjuntos numéricos



Propiedades:

- $a^0 = 1$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^1 = a$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$; n es impar
- $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n^2]{a}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{1/n} = \frac{1}{a^{1/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el valor de: $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\right]^{1/2}$

Resolución:

Aplicando la propiedad de exponentes negativos:

$$[3^2 + 2^4]^{1/2} = [25]^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

2. Calcular el valor de:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right]^{0,5}$$

Resolución:

Aplicando la propiedad de exponentes negativos: $[2^2 + 2(3)^2 + (3)^3]^{1/2} = [4 + 18 + 27]^{1/2} = [49]^{1/2} = \sqrt{49} = 7$

3. Reducir la expresión:

$$T = (x^m)^{1/m} - (x^{1+1/m})^{m/(m+1)} + m\sqrt{x^{2m}}$$

Resolución:

$$E = (x)^{m(1/m)} - x^{(m+1)(\frac{m}{m+1})} + x^{\frac{2m}{m}}$$

$$\therefore E = x - x + x^2 = x^2$$

4. Simplificar: $M = \sqrt[n]{\frac{2^{n+2}}{n+2} \cdot 2^{2n+n^2}}$

Resolución:

Realizando transformaciones equivalentes:

$$M = \sqrt[n]{\frac{2^{n+2}}{2^{\frac{2n+n^2}{n+2}}}} = \sqrt[n]{\frac{2^{n+2}}{2^{\frac{n(n+2)}{n+2}}}}$$

$$\Rightarrow M = \sqrt[n]{\frac{2^{n+2}}{2^n}} = \sqrt[n]{2^{n+2-n}} = \sqrt[n]{2^2} = \sqrt[n]{4}$$

5. Hallar la fracción decimal equivalente a la siguiente expresión:

$$E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{8}}$$

Resolución:

$$\text{Efectuando: } E = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{36(2)} + \sqrt{25(2)} - \sqrt{4(2)}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} \quad \therefore E = \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{9}$$

6. Efectuar: $P = 8^{-27-9-4^{-0.5}}$

Resolución:

En ejercicios de potencias de exponentes en cadena se empieza las reducciones de la potencia extrema. Así:

$$-4^{-0.5} = -\frac{1}{4^{0.5}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 9^{-4^{-0.5}} = 9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 27^{-9-4^{-0.5}} = 27^{-1/3} = \frac{1}{27^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P = 8^{-27-9-4^{-0.5}} = 8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$$

$$\therefore P = 1/2 = 0,5$$

7. Hallar el valor de x en: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = 27$

Resolución:

Realizando transformaciones equivalentes:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = 3^3 \Rightarrow 3^{\frac{1}{3 \times 3}} = 3^3$$

Identificando exponentes:

$$\frac{1}{3 \times 3} = 3 \Rightarrow 1 = 3^{2+1/x}, \text{ pero: } 1 = 3^0$$

$$\Rightarrow 0 = 2 + 1/x \quad \therefore x = -1/2$$

8. Simplificar: $E = ab^2 \sqrt[3]{a^{-1}b^{-2}\sqrt{a^{-1}b}}$

Resolución:

Eliminando radicales y escribiendo bajo la forma exponencial:

$$E = ab^2 a^{-1/3} b^{-2/3} a^{-1/6} b^{1/6}$$

Reduciendo potencias de igual base:

$$E = a^{(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6})} b^{(2-\frac{2}{3}+\frac{1}{6})}$$

$$\Rightarrow E = a^{1/2} b^{3/2} = \sqrt{a} \sqrt{b^3} = \sqrt{a} b \sqrt{b}$$

$$\therefore E = b \sqrt{ab}$$

9. Simplificar la expresión: $E = \frac{2^{n+4} - 2(2^n)}{2(2^{n+3})}$

Resolución:

Representando convenientemente:

$$E = \frac{2^n \times 2^4 - 2(2^n)}{2 \times 2^n \times 2^3} = \frac{2^n(2^4 - 2)}{2^n(16)} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

10. Simplificar la expresión: $E = \frac{3^{n+3} - 3(3^n)}{3(3^{n-1})}$

Resolución:

Representando convenientemente:

$$E = \frac{3^n 3^3 - 3(3^n)}{3(3^n)(3^{-1})} = \frac{3^n(27 - 3)}{3^n} = 24$$

11. Calcular el valor de:

$$E = \frac{2^{x+4} + 36(2^{x-2})}{2^{x+5} - 2(2^{x+3}) - 4(2^{x+1}) - 6(2^{x-1})}$$

Resolución:

$$E = \frac{2^x(2^4) + 36(2^x/2^2)}{2^x 2^5 - 2(2^x 2^3) - 4(2^x)(2^1) - 6(2^x/2)}$$

$$E = \frac{(16)(2^x) + (9)(2^x)}{(32)(2^x) - (16)(2^x) - (8)(2^x) - (3)(2^x)}$$

$$E = \frac{25(2^x)}{5(2^x)} \quad \therefore E = 5$$

12. Calcular el valor de: $E = \frac{4^3(8^{4/3})^{-n}}{[4(4^{-1})^n]^2}$

Resolución:

Transformando, para escribir en base 4:

$$(8^{4/3})^{-n} = [(2^3)^{4/3}]^{-n} = (2^4)^{-n} = [(2^2)^2]^{-n} = 4^{-2n}$$

Reemplazando en la expresión propuesta:

$$E = \frac{(4^3)(4^{-2n})}{(4^1 4^{-n})^2} = \frac{(4^3)(4^{-2n})}{(4^{1-n})^2} = \frac{4^{3-2n}}{4^{2-2n}}$$

$$\Rightarrow E = 4^{3-2n-(2-2n)} = 4^{3-2n-2+2n} = 4^1 = 4$$

13. Calcular el valor de: $E = \frac{21^6 \times 35^3 \times 80^3}{15^4 \times 14^9 \times 30^2}$

Resolución:

Descomponiendo en factores primos:

$$E = \frac{(3 \times 7)^6 (7 \times 5)^3 (2^4 \times 5)^3}{(3 \times 5)^4 (2 \times 7)^9 (2 \times 3 \times 5)^2}$$

Por propiedad:

$$E = \frac{3^6 \times 7^6 \times 7^3 \times 5^3 \times 2^{12} \times 5^3}{3^4 \times 5^4 \times 2^9 \times 7^9 \times 2^2 \times 3^2 \times 5^2}$$

Multiplicando potencias de bases iguales:

$$E = \frac{3^6 \times 7^9 \times 5^6 \times 2^{12}}{3^6 \times 7^9 \times 5^6 \times 2^{11}}$$

$$\Rightarrow E = 2^{12/2^{11}} = 2^{12-11} = 2^1 \quad \therefore E = 2$$

14. Calcular el valor de: $E = \left\{ \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3} \right\}^{-6/3}$

Resolución:

Escribiendo la raíz principal en la forma exponencial:

$$E = \left\{ 3^{\sqrt[3]{3/3}} \right\}^{-6/3}$$

Transformando los exponentes:

$$E = \left\{ (3)^{3^{1/2}} \right\}^{3^{-1/6}} = \left\{ (3)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \right\}^{3^{-1/6}}$$

$$E = \left\{ (3)^{\frac{1}{6}} \right\}^{3^{-1/6}} = (3)^{\frac{1}{6} \times 3^{-1/6}}$$

$$E = 3^{3^{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}} = 3^{3^0} = 3^1 \quad \therefore E = 3$$

15. Simplificar la expresión:

$$E = \left\{ m^{-1} \left[m(m^3)^{1/2} \right]^{1/5} \right\}^{-2}$$

Resolución:

Efectuando operaciones:

$$E = (m^{-1})^{-2} \left[(m^1)^{1/5} \right]^{-2} \left\{ \left[(m^3)^{1/2} \right]^{1/5} \right\}^{-2}$$

$$\Rightarrow E = m^2 m^{-\frac{2}{5}} m^{-\frac{3}{5}} = m^{2-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}} \quad \therefore E = m$$

16. Calcular: $P = \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{4 \sqrt[n]{4^n}}}$

Resolución:

Trabajando con el denominador:

$$\sqrt[n+2]{4 \times \sqrt[n]{4^n}} = \sqrt[n+2]{4^1 \times 4^{n/2}} = \sqrt[n+2]{4^{1+n/2}}$$

$$= \sqrt[n+2]{4^{\frac{n+2}{2}}} = \sqrt[n+2]{(2^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \sqrt[n+2]{2^{n+2}}$$

$$= 2^{\frac{n+2}{n+2}} = 2$$

Reemplazando y descomponiendo:

$$P = \sqrt[n]{\frac{2^n \times 2^1}{2}} = \sqrt[n]{2^n} \quad \therefore P = 2$$

17. Calcular: $E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{5^{-n} + 2^{-n} + 3^{-n}}}$

Resolución:

Transformando el denominador:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{\frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}}$$

Dando común denominador en el denominador de la raíz:

$$E = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{\frac{6^n + 15^n + 10^n}{5^n \times 2^n \times 3^n}}} = \sqrt[n]{\frac{10^n + 15^n + 6^n}{\frac{1}{(5 \times 2 \times 3)^n}}}$$

$$\therefore E = \sqrt[n]{(30)^n} = 30$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $3^3 \sqrt[3]{\frac{3^{(3)(3)}}{3^{-4} \times \sqrt{3^{-30}}}}$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$
d) 1 e) $\sqrt{7}$

2. Calcular A y B:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{-1} + \left(\frac{2}{7} \right)^{-2} + \left(\frac{9}{16} \right)^{-2-1} + 3^{4 \cdot 2^{-1}} \right\}^{2^{-1}}$$

$$B = \left\{ (2^{-3^{-1}})^{27^9-2^{-1}} \right\}^{-5^0}$$

- a) 5; 2 b) 1; 2 c) 2; 3
d) 4; 7 e) 5; 9

3. Calcule A, B y C:

$$A = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}; \quad B = \sqrt{\pi \sqrt{\pi \sqrt{\pi \dots}}}$$

$$C = \sqrt{3 \sqrt{3 \sqrt{3 \dots \sqrt{3 \sqrt{9}}}}}$$

- a) 3; π ; 3 b) 1; π ; 2 c) 1; π ; 5
d) 1; π ; 4 e) 2; π ; 5

4. Si el exponente final de: $\sqrt{x^n} \sqrt{x} \sqrt{x}$ es $7/4$, calcular n.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Calcule el valor de x, en: $2^x \sqrt{2} = \sqrt[3]{4^x}$

- a) 2 b) $-3/2$ c) $1/2$
d) $1/4$ e) $5/3$

6. Reduce: $\left(\frac{128^{5n}}{4 \sqrt{7^{2^{5n+3}}}} \right)^{64^{5n}}$

- a) 27 b) 48 c) 49
d) 20 e) 30

7. Encontrar el valor de n, si después de reducir:

$$\sqrt[n]{n^{n \cdot n}} \sqrt[n]{n^{n \cdot n}}; n \in \mathbb{N}, \text{ se obtiene: } 4^{16}$$

- a) 5 b) 4 c) 9
d) 1 e) 10

8. Si: $x^{2-2^x} = 2$, calcule: $x^{1/2x}$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{2}$
d) 2 e) 8

9. Si: $a^a = 2$, halle: a^{a+1}

- a) 4 b) 2 c) 8
d) 10 e) 12

10. Reduce: $\left(\frac{\sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}{\sqrt{x^4 \sqrt{x}}} \right)^8$

- a) x b) x^2 c) $3x$
d) $5x$ e) $7x$

11. Si: $x \neq 0$, simplificar: $\frac{(\dots((x^5)^4)^3 \dots)^{-5}}{x^{4^0} x^{-4^0}}$

- a) 2 b) 0 c) 3
d) 1 e) 5

12. Si: $x \neq 0$, reduce: $\frac{(x^2)(x^4)(x^6)(x^8)(x^{10})}{(x)(x^3)(x^5)(x^7)(x^9)}$

- a) x^5 b) x c) $2x$
d) x^{10} e) x^9

13. Si se cumple: $x^6 = 6$, hallar: x^6

- a) 12 b) 2 c) 6
d) 12 e) 18

14. Calcule: $4 \sqrt[4]{(-2)^{4^{70^5}}}$

- a) 1 b) -2 c) 3
d) 2 e) 6

15. Reduce: $\left\{ 3 \sqrt[3]{9} \sqrt[3]{9} \right\}^{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right)^{\left(\frac{3}{\sqrt{3}} - 2 \right)^{\frac{3}{\sqrt{3}}}}}$

- a) 1 b) 3 c) 9
d) 12 e) 81

16. Si se cumple que: $x^{\sqrt{1/x}} = 2$, calcular: \sqrt{x}

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

17. Calcule:

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^{-\left(\frac{1}{2} \right)^{-1}} + \left(\frac{1}{125} \right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{81} \right)^{-16^{-\frac{1}{2}}} \right\}^{2^{-1}}$$

- a) 4 b) 21 c) 30
d) 40 e) 20

18. Si $x^x = 5$, indicar el exponente de a^x en: $a^{x^{x+1}}$

- a) 5 b) 3 c) 2
d) 4 e) 7

19. Si: $xy \neq 0$, simplificar A y B:

$$A = \frac{x^{-2} + y^{-2}}{(xy)^{-2}}; \quad B = \frac{8x^3y^{-4}}{4x^{-1}y^2}$$

- a) $x^2 + y^2$; $2x^4y^{-6}$ b) $x + y$; x^3/y^2
 c) $x - y$; x^3/y d) $x + y$; x/y
 e) $x + y$; x^3/y^5
20. Si: $x^y = 2$, calcule: $(x^{xy})^y (x^3)^{-y} (4y^2)^{y-2}$
- a) 2 b) 3 c) 4
 d) 5 e) 6

21. Efectuar A y B:

$$A = \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}; \quad B = \frac{\sqrt[6]{9} \times \sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{9}}{\sqrt[20]{9} \times \sqrt[5]{9}}$$

- a) 2; 3 b) 5; 2 c) 7; 2
 d) 1; 2 e) 4; 2
22. Indique el valor reducido de la expresión:

$$\frac{\sqrt[6]{7} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{27} + \sqrt{12}}}{\sqrt[6]{7} \cdot \sqrt{3}}$$

- a) 2 b) 5 c) 7
 d) 9 e) 15
23. Si: $n \in \mathbb{N}$ y además:

$$\frac{\overbrace{n^{360} + n^{360} + \dots + n^{360}}^{81 \text{ veces}}}{\underbrace{81 \times 81 \times 81 \dots 81}_{10 \text{ veces}}} = 81^{81}$$

calcule: $n^2 + 1$

- a) 20 b) 30 c) 40
 d) 10 e) 15
24. Si: $a^a = 2$, calcule: $\sqrt[3]{(a^{a^2 + a^a + a^a})^{1/a}}$
- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

25. Halle el exponente final de x

$$\frac{(x^a)^{bc} (x^{bc})^a \overbrace{x^{ac} x^{ac} \dots x^{ac} x^{ac}}^{b \text{ veces}}}{(x^{3a})^b}; \quad x \neq 0$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 5 e) 8

26. Si se cumple que: $x^{x+x^3} = 3$

calcule: $x^3 + x^{x^3} + x^6 + x^{x^6}$

- a) 21 b) 25 c) 37
 d) 42 e) 28

27. Efectuar: $3 - \frac{6}{5 - \frac{4}{3 - \frac{3}{2}}}$

- a) 1/2 b) 3/7 c) 1/4
 d) 1/9 e) 3/91

28. Simplificar: $\frac{(10^4)(30^3)(42^3)}{(54)(250)(60^2)(70^2)}$

- a) 20 b) 84 c) 12
 d) 30 e) 90

29. Sea: $x^{x^2} = 5$; halle: $(x^x)^{2x}$

- a) 20 b) 35 c) 25
 d) 28 e) 40

30. Simplificar:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}$$

- a) 287 b) 281 c) 235
 d) 123 e) 435

31. Reduce: $(5^{5\sqrt{5}} \times \sqrt{5^{5-10\sqrt{5}}}) \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}$

- a) 21 b) 24 c) 25
 d) 26 e) 30

32. Simplificar: $\frac{(10^5)(6^5)(24)}{(48^2)(15^4)(4^3)}$

- a) 2 b) 5/2 c) 5/6
 d) 4/3 e) 3/8

33. Sea $x > 1$ y además: $x^{x+x} = x^{x^2}$

calcule: x^{3x}

- a) 2 b) 3 c) 8
 d) 5 e) 7

34. Simplificar: $\left[\frac{x^{-3} + x^{-5} + x^{-7}}{x^3 + x^5 + x^7} \right]^2$; $x \in \mathbb{R}^+$

- a) x^7 b) x^3 c) x^{-2}
 d) x^{-5} e) x^{-20}

35. Simplificar: $\frac{2^{n+4} - 2 \times 2^{n+2}}{2 \times 2^{n+3}}$; $x \in \mathbb{N}$

- a) 2 b) 3 c) $1/3$
 d) $1/2$ e) $1/5$

CLAVES	1. a	8. a	15. c	22. c	29. c
	2. a	9. a	16. a	23. d	30. a
	3. a	10. b	17. a	24. b	31. c
	4. b	11. d	18. a	25. a	32. b
	5. b	12. a	19. a	26. d	33. c
	6. c	13. c	20. a	27. b	34. e
	7. b	14. d	21. a	28. b	35. d

POLINOMIOS

Notación matemática. Es la que permite diferenciar las variables de las constantes.

$$P(x; y; z) = \underbrace{2ax^3}_{\text{variables}} - \underbrace{5bxyz}_{\text{constantes}}$$

Expresiones algebraicas. Son aquellas expresiones donde las operaciones que se usan son solo las de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación entre sus variables, en un número limitado de combinaciones.

Son ejemplos de expresiones algebraicas:

- $P(x) = x^2 + 5x - y$
- $Q(x; y) = \frac{6x - y}{\pi} + \sqrt{3}y - 5$
- $R(x; y; z) = 3 + 5x + \log 2/xyz$
- $T(x; y) = \frac{x - y}{\sqrt{xy}} + 6$

Son ejemplos de expresiones no algebraicas llamadas también trascendentes:

- $K(x) = \cos x - 1$
- $N(x) = x^{+x} - 1$
- $M(x; y; z) = 3 + 6x + \log x/xyz$
- $R(x) = 1 + x + x^2 + \dots$

Las expresiones algebraicas pueden ser racionales o irracionales.

Término algebraico. Es aquella expresión algebraica en la que no se enlaza a las variables mediante la adición y la sustracción, presenta dos partes que son el coeficiente y la parte literal o parte variable.

$$N(x; y) = \underbrace{5\pi}_{\text{coeficiente}} \underbrace{x^2y^7}_{\text{parte variable}}$$

Son ejemplos de término algebraico:

$$P(x) = -6zx; Q(x; y) = 2000x^2y^7$$

Vemos que las expresiones N y Q presentan diferentes coeficientes pero la misma parte variable y dichas variables están elevadas al mismo exponente.

Ellos se denominarán **términos semejantes** y tienen como propiedad que la suma de términos semejantes se reducen a un solo término semejante y se obtiene sumando los coeficientes acompañando de la misma parte variable, por ejemplo:

$$\text{Sean: } 4x^7y; 5\pi x^7y; abx^7y$$

$$\Rightarrow 4x^7y + 5\pi x^7y + abx^7y = (4 + 5\pi + ab)x^7y$$

POLINOMIO

Se define al polinomio como la expresión algebraica donde los exponentes de las variables son enteros positivos y está definido para cualquier valor que se dé a sus variables.

Son ejemplos de polinomios:

- $M(x; y) = 5x^2y + (-6x^3y^5) + 1$
- $N(x) = x^2 - 6x^3 + 5x^6 - 2$
- $T(x) = x^2 + 2x^2 + 7x^2 + 4x^2$

GRADO DE UN POLINOMIO

Es la característica que distingue a una familia de polinomios, este grado se halla según la cantidad de variables.

- **Polinomio de una sola variable.** El grado está dado por el mayor exponente de la variable. Por ejemplo:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^6 \text{ es de grado } 6;$$

$$N(z) = x^7 + 2z^2x - z^3 - 1 \text{ es de grado } 3. \\ (\text{variable } z)$$

- **Monomios de varias variables.** El grado o grado absoluto será la suma de los exponentes de todas sus variables mientras que su grado con respecto a una variable o grado relativo será el exponente de la variable en referencia. Por ejemplo:

$$M(x; y) = 7x^2y^8 \text{ es de grado absoluto: } 10 \\ \text{respecto a } x \text{ (GR): } 2 \\ \text{respecto a } y \text{ (GR): } 8$$

- **Polinomio de dos o más términos con una variable.** El grado o grado absoluto está dado por el mayor grado de los monomios que intervienen, mientras que el grado relativo (GR) lo dará el mayor exponente de la variable en referencia. Por ejemplo:

$$P(x; y) = 7x^2y^3 - 4x^5y^6 + 6x^7y^2$$

Grado absoluto (GA):

mayor $\{5; 11; 9\} = 11$

Grado relativo (GR)

$GR(x) = \text{mayor } \{2; 5; 7\} = 7$

$GR(y) = \text{mayor } \{3; 6; 2\} = 6$

Representación general de polinomios de una sola variable

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$, donde:

$a_0; a_1; \dots; a_n$: coeficientes

a_n : coeficiente principal, si $a_n \neq 0$

a_0 : término independiente.

Si $a_n = 1 \Rightarrow P(x)$ se llama mónico

Casos particulares

$n = 1$: $P(x) = a_0 + a_1x$ polinomio lineal, si $a_1 \neq 0$.

$n = 2$: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, polinomio cuadrático, si $a_2 \neq 0$.

$n = 3$: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, si $a_3 \neq 0$, polinomio cúbico.

IGUALDADES DE POLINOMIOS

Dos polinomios son iguales o idénticos si son del mismo grado y poseen el mismo valor para cualquier valor asignado a su variable o variables (que deben ser equivalentes).

Es decir, al ser idénticos presentarán los mismos coeficientes en términos semejantes.

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ es igual a

$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$ o sea,

$P(x) = Q(x) \Rightarrow a_0 = b_0 \wedge a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$

Por ejemplo:

$P(x) = x(x + 3) + (2 - x)3$ es idéntico a

$Q(x) = x^2 + 6$; pues $P(1) = Q(1)$; $7 = 7$

$R(x) = 2x^2 - 13x + 22$ es idéntico a:

$T(x) = 22 - 13x + 2x^2$ ya que los coeficientes de términos semejantes son iguales.

POLINOMIOS ESPECIALES

1. **Polinomio mónico.** Es un polinomio de una variable que tiene coeficiente principal 1 se le denomina mónico.

Son ejemplos de polinomios mónicos:

$$A(x) = 1 + x^2 + 3x; B(x) = 7 - 2x^2 + x^3; C(x) = x$$

2. **Polinomio homogéneo.** Es aquel en el que cada término tiene el mismo grado absoluto.

Son ejemplos de polinomios homogéneos:

$A(x; y) = 6x^4y^2 + 3xy^5 - y^6$, su grado de homogeneidad es 6.

3. **Polinomio completo.** Es aquel polinomio que presenta todos sus exponentes desde el mayor hasta el de término independiente.

Son ejemplos de polinomios completos:

$$A(x) = 7 + 3x^2 + x + 4x^3$$

$B(x; y) = xy^2 + xy + x^2$ es completo respecto a y.

$C(x; y) = x^3y + x^2y^2 + x + 2y^3$ es completo respecto a x y también respecto a y.

4. **Polinomio ordenado.** Si los exponentes de una variable presentan un orden ya sea ascendente o descendente respecto a esta variable será ordenado.

Son ejemplos de polinomios ordenados:

$P(x; y) = y^6x^2 + y^4x^3 + y^2x^5 + x^6y$ es ordenado descendientemente respecto a y mientras que respecto a x lo es en forma ascendente.

Nota:

- En todo polinomio de dos o más términos la suma de sus coeficientes se obtiene evaluando el polinomio para $x = 1$. Es decir, suma de coeficientes es $P(1)$ o $P(1; 1)$ o $P(1; 1; 1)$ (según la cantidad de variables).
- En todo polinomio su término independiente se obtiene evaluando dicho polinomio para $x = 0$. Es decir: término independiente: $P(0)$ o $P(0; 0)$ o $P(0; 0; 0)$ (según la cantidad de variables).
- Aquel polinomio que cumple simultáneamente con la definición 3 y 4 se denominan completos y ordenados, por ejemplo, $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 2$ es completo y ordenado descendientemente mientras que $R(x) = 1 - x - x^2 - x^3 - x^4$ es completo y ordenado ascendientemente.

- En todo polinomio completo y ordenado el número de términos es su grado más uno, el polinomio P anterior es de grado 3 vemos que su cantidad de términos es 4 el polinomio R es de cuarto grado y posee cinco términos.

Ejemplo:

Siendo $P(x - 1) = x^2 + 4$, hallar su término independiente más la suma de coeficientes. Aparentemente este ejemplo parece obvio, pues se puede pensar que su término independiente es 4 y la suma de coeficientes es $1 + 4 = 5$, pero ¡cuidado! la variable es $(x - 1)$ luego para calcular la suma de coeficientes hallemos (1) para $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$
 $\therefore P(1) = 2^2 + 4 = 8$, asimismo el término independiente: $P(0)$ para $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
 $\therefore P(0) = 1^2 + 4 = 5$

CÁLCULO DE VALORES NUMÉRICOS Y CAMBIO DE VARIABLE EN POLINOMIOS

Valor numérico. El valor numérico es el resultado que se obtiene al reemplazar la variable de un polinomio por algún número.

Ejemplo:

- Si $P(x) = x^{b+1} - 2x^b + 8$; $b \in \mathbb{N}$ hallemos $P(2)$, lo obtendremos cuando su variable sea 2 es decir $x = 2$.
 $P(2) = 2^{b+1} - 2 \times 2^b + 8 \therefore P(2) = 8$
- Si $Q(x; y) = 2x^2 - 3xy^2 + y$; hallemos $Q(3; -1)$, lo obtendremos cuando la colección $(x; y)$ sea igual a $(3; -1)$, es decir, $x = 3$; $y = -1$
 $Q(3; -1) = 2(3)^2 - 3(3)(-1)^2 + (-1)$
 $\therefore Q(3; -1) = 8$

Nota:

En todo polinomio constante siempre se obtienen el mismo valor numérico para cualquier valor de su variable, es decir, si:

$$P(x) = k \Rightarrow P(x_0) = k, \forall x_0$$

Cambio de variable. Consiste en reemplazar variables por otras variables.

Ejemplos:

- Si $P(x) = 3x + x^2 + 6$, cambiemos a x por $(x - 1)$:
 $\Rightarrow P(x - 1) = 3(x - 1) + (x - 1)^2 + 6$
 $\Rightarrow P(x - 1) = 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 + 6$
 $\therefore P(x - 1) = x^2 + x + 4$
- Si $Q(x) = x^5 + x^7 + 1$, hallemos $Q(-x)$, cambiando x por $-x$:
 $\Rightarrow Q(-x) = (-x)^5 + (-x)^7 + 1$
 $\therefore Q(-x) = -x^5 - x^7 + 1$
- Si $P(b) = 4b^2 - 8b^3 + 4b - 1$, hallemos $P(b/2)$; cambiando b por $b/2$:
 $P\left(\frac{b}{2}\right) = 4\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{b}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{b}{2}\right) - 1$
 $\therefore P(b/2) = b^2 - b^3 + 2b - 1$
- Si $P(x - 1) = x^2 + 9$, hallemos $P(x)$
 Lo obtendremos cambiando a x por $(x - 1)$ ¡Cuidado! no iguale así: $x = x - 1$ pues lo puede confundir y llegará en algunos casos a obtener absurdos.
 Para realizar correctamente el cambio de variable veamos dos formas:
 - La variable que se desea cambiar (en este caso $x - 1$) se forma en el segundo miembro mediante un artificio.
 Así: $P(x - 1) = (x - 1 + 1)^2 + 9$ realizando el cambio: $(x - 1)$ por x obtendremos:
 $P(x) = (x + 1)^2 + 9$
 $\Rightarrow P(x) = x^2 + 2x + 1 + 9$
 $\therefore P(x) = x^2 + 2x + 10$
 - La variable que se desea cambiar, es decir, $(x - 1)$ se iguala a una letra (distinta de x) llevamos todo a esta nueva letra, es decir: $x - 1 = b \Rightarrow x = b + 1$ reemplazando obtendremos $P(b) = (b + 1)^2 + 9$ operando
 $P(b) = b^2 + 2b + 1 + 9$
 $\Rightarrow P(b) = b^2 + 2b + 10$
 $\therefore P(x) = x^2 + 2x + 10$

Nota:

Al realizar un cambio de variable en el polinomio su grado; término independiente; coeficientes no se alteran. Es decir, obtendremos polinomios equivalentes.

Ejemplos:

1. $P(x) = 3x^4$ al reemplazar x por z : $P(z) = 3z^4$ o reemplazando x por $(x-1)$: $P(x-1) = 3(x-1)^4$ o reemplazando x por x^6 : $P(x^6) = 3(x^6)^4$; todos ellos poseen el mismo grado 4; coeficiente principal 3. es decir, hemos obtenido polinomios equivalentes.
2. Si: $P(x) = 2x + 6 \wedge Q(x+1) = 2x + 8$ vemos que $Q(x+1) = 2(x+1) + 6$
En este caso $P(x)$ y $Q(x)$ son equivalentes según la nota anterior. Sería erróneo plantear que $P(x)$ es idéntico a $Q(x+1)$ pues poseen diferentes variables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. El grado del siguiente monomio es 8:

$$3x^6 \sqrt[5]{9x^4 \sqrt[3]{x^m \sqrt{2x^m}}}$$

hallar el valor de m .

Resolución:

Eliminando radicales:

$$(3x^6)^5 \sqrt[5]{9(x^{4/5})x^{m/15}(\sqrt[3]{2x})^{m/30}}$$

Reduciendo potencias de igual base:

$$3^5 \sqrt[5]{9 \sqrt[2]{2} x^{6 + \frac{4}{5} + \frac{m}{15} + \frac{m}{30}}}$$

De acuerdo al enunciado del problema, la expresión es de grado 8, es decir:

$$6 + \frac{4}{5} + \frac{m}{15} + \frac{m}{30} = 8 \Rightarrow m = 12$$

2. Si: $f(x) = \frac{x+c}{x-1}$, $x \neq 1$, $c \neq -1$; hallar el valor de: $f[f(x)]$.

Resolución:

$$\text{Por dato: } f(x) = \frac{x+c}{x-1} \Rightarrow f[f(x)] = \frac{\frac{x+c}{x-1} + c}{\frac{x+c}{x-1} - 1}$$

Efectuando operaciones y reduciendo:

$$f[f(x)] = \frac{x(c+1)}{(c+1)} = x$$

3. Hallar m , p y b para que el polinomio:

$$P(x) = 5x^{m-18} + 15x^{m-p+15} + 7x^{b-p+16}$$

sea completo y ordenado en forma descendente.

Resolución:

Como el polinomio está ordenado en forma descendente los exponentes van disminuyendo desde el primero hasta el tercero. Además es completo, entonces el menor exponente que es igual a cero (por ser término independiente) corresponde al tercero, el anterior igual a 1 y el primero igual 2, así:

$$b - p + 16 = 0 \quad \dots (1)$$

$$m - p + 15 = 1 \quad \dots (2)$$

$$m - 18 = 2 \Rightarrow m = 20$$

$$\text{En (2): } 20 - p + 15 = 1 \Rightarrow p = 34$$

$$\text{En (1): } b - 34 + 16 = 0 \Rightarrow b = 18$$

4. Si: $f(x+1) = 3x+7$; hallar: $f(x-2)$

Resolución:

$$f(x+1) = 3x+7$$

$$\downarrow \times 3; +4 \uparrow$$

$$\text{Luego: } f(x-2) = 3(x-2) + 4 = 3x - 6 + 4$$

$$\therefore f(x-2) = 3x - 2$$

5. Hallar m/n si el polinomio:

$P(x; y) = 3x^m y^n (2x^{2m+1} + 7y^{6n+1})$ es homogéneo.

Resolución:

Efectuando operaciones:

$$P(x; y) = \underbrace{6x^{3m+1}y^n}_{t_1} + \underbrace{21x^m y^{7n+1}}_{t_2}$$

Como es homogéneo, se cumple:

$$GA(t_1) = GA(t_2) \Rightarrow 3m + 1 + n = m + 7n + 1$$

$$3m - m = 7n - n \Rightarrow 2m = 6n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{2}; \therefore \frac{m}{n} = 3$$

6. Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio:

$$P(x; y) = ax^{a^b} + bx^{\frac{b}{\sqrt{a^a-b}}}y^{12} + \frac{a}{b}x^3y^{13} + \frac{b^2}{a}y^{b^a}$$

si es homogéneo.

Resolución:

Si es homogéneo, se cumple:

$$GA(t_1) = GA(t_2) = GA(t_3) = GA(t_4)$$

$$\underbrace{a^b}_{(\alpha)} = \underbrace{b^{\sqrt{a^{a-b}} + 12}}_{(\beta)} = \underbrace{3 + 13}_{(\gamma)} = \underbrace{b^a}_{(\phi)}$$

Haciendo: $(\alpha) = (\phi)$

$$a^b = b^a \Rightarrow a = b^{a/b} \quad \dots (\rho)$$

Haciendo: $(\beta) = (\gamma)$

$$b^{\sqrt{a^{a-b}} + 12} = 16 \Rightarrow a^{(a-b)/b} = 4$$

$$a^{\frac{a}{b}-1} = 4 \Rightarrow \frac{a^{a/b}}{a} = 4 \quad \dots (\theta)$$

Sustituyendo (ρ) en (θ) se obtiene:

$$\frac{a^{a/b}}{b^{a/b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{a/b} = 4 = 2^2$$

de aquí: $a/b = 2 \Rightarrow a = 2b \quad \dots (\varepsilon)$

Reemplazando (ε) en (ρ)

$$(2b) = (b)^{2b/b} \Rightarrow 2b = b^2 \Rightarrow b = 2$$

En (ε) : $a = 2(2) = 4$

La suma de coeficientes del polinomio es:

$$a + b + a/b + b^2/a = 4 + 2 + 4/2 + 4/4 = 6 + 2 + 1 = 9$$

7. Si la expresión:

$$P(x; y; z) = \frac{x+y+z+3}{y^3 z^3 x^3 y + 3z + x^3 z^3 y^3 x + 3z + x^3 y^3 z^3 x + 3y}$$

es homogénea, hallar su grado absoluto.

Resolución:

Si es homogénea, los grados absolutos de cada término deben ser iguales, es decir:

$$\frac{3 + 3 + 3y + 3z}{x + y + z + 3} = \frac{3 + 3 + 3x + 3z}{x + y + z + 3} = \frac{3 + 3 + 3x + 3y}{x + y + z + 3} = GA(P)$$

Usando la propiedad de serie de razones iguales:

$$\frac{3 + 3 + 3y + 3z + 3 + 3 + 3x + 3z + 3 + 3 + 3x + 3y}{x + y + z + 3 + x + y + z + 3 + x + y + z + 3} = \frac{GA(P)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{6(3 + x + y + z)}{3(x + y + z + 3)} = GA(P) \quad \therefore GA(P) = 2$$

8. Si: $P(x - 1) = 2x + 1 \wedge P[Q(x)] = 2x - 1$
hallar: $Q(x + 1)$

Resolución:

$$P(x - 1) = 2x + 1$$

$$\boxed{\times 2; +3} \uparrow$$

Como $P[Q(x)] = 2x - 1$, $2Q(x) + 3 = 2x - 1$

$$Q(x) = \frac{2x - 4}{2} \Rightarrow Q(x) = x - 2$$

$$\Rightarrow Q(x + 1) = (x + 1) - 2$$

$$\therefore Q(x + 1) = x - 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Si $f(x) = x^{41} + 512x^{32} + 3$; hallar: $f(-2)$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
- Si: $f(x) = x^{99} + 243x^{94} + 2x + 6$; hallar: $f(-3)$
a) 1 b) 0 c) 3
d) 4 e) 5
- Si: $P(x^3 + 5) = x^6 + x^3 + 7$; calcular: $P(7)$
a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14
- Si: $P(x^5 + 2) = x^{10} + x^5 + 3$; hallar: $P(3)$
a) 10 b) 21 c) 3
d) 5 e) 512
- A partir de: $P(3x + 1) = 15x - 4$; hallar: $P(2x + 3)$
a) $10x + 1$ b) $10x + 3$ c) $10x - 5$
d) $10x - 6$ e) $10x + 6$
- Si: $F(x + 4) = 2x + 3$; hallar: $F(3x + 1)$
a) $2x + 1$ b) $3x - 1$ c) $6x - 3$
d) $6x + 2$ e) $6x + 3$
- Si: $\frac{(x^n - 2)^3 x^{n+4}}{(x^n)^2}$ es de 6.º grado; hallar: n
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
- Si $\frac{(x^m + 2)^4 (x^m)^{-3}}{(x^3)^2}$ es de 4.º grado; hallar: m

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
9. El grado de $M(x)N(x)$ es 10 y el grado de $M(x)N^3(x)$ es 16. Calcular el grado de: $M^3(x) - N^2(x)$
a) 7 b) 5 c) 6
d) 21 e) 12
10. El grado de $M(x)N(x)$ es 7 y el grado de $M(x) \div N(x)$ es 3. Calcular el grado de: $M(x) - N(x)$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 7
11. Si se cumple: $6x^2 - 10x(a - x) \equiv bx^2 + 10x$, calcular: $a + b$
a) 10 b) 12 c) 13
d) 15 e) 17
12. Si se cumple: $x^2 - 2x(a - x) \equiv bx^2 + 8x$, calcular: $a - b$
a) -3 b) -4 c) -5
d) -7 e) -1
13. Hallar $m - n + p$, si se sabe que el polinomio: $P(x) = x^{m-10} + x^{m-n+15} + x^{p-n+6}$ es completo y ordenado en forma descendente.
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10
14. Hallar $a + b + c$, si se sabe que el polinomio: $P(x) = x^{a-8} + x^{a+b-3} + x^{c-1}$ es completo y ordenado en forma descendente.
a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 7
15. Hallar $m + n - p$, en:
 $(m - n - 2)x^4 + (m + n - 5)x^2 + (p - 1) \equiv 0$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
16. Hallar: $(m^2 - n^2)$, en:
 $(m + n - 3)x^2y + (m - n - 2)xy^2 \equiv 0$
a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10
17. Si el polinomio:
 $P(x; y; z) = x^{ab} + x^7 y^{ba} + x^{20} z^{12}$
es homogéneo, calcular: $(a - b)^2$
a) 1 b) 3 c) 9
d) 16 e) 25
18. Sabiendo que el polinomio:
 $P(x) = (ax + b)(x - 1) + c(x^2 + x + 1)$ es idéntico a: $Q(x) = 2x^2 + 5x - 1$, calcular: $a + b - c$
a) 1 b) -1 c) 0
d) 2 e) 3
19. Calcular: $m + n + p$, si:
 $P(x; y) = 5x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^2 + x^{2p}y^q + x^{q-1}y^5$
es homogéneo de grado 7.
a) 5 b) 7 c) 8
d) 15 e) 18
20. Si: $P(x + 3) = 5x + 7$
 $P[Q(x) - 3] = 15x + 2$, calcular: $P[Q(1)]$
a) 32 b) 35 c) 37
d) 81 e) 120

CLAVES

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 1. c | 5. e | 9. b | 13. c | 17. c |
| 2. b | 6. c | 10. d | 14. d | 18. a |
| 3. d | 7. d | 11. d | 15. d | 19. b |
| 4. d | 8. b | 12. d | 16. c | 20. a |

PRODUCTOS NOTABLES

POLINOMIO PRODUCTO

A partir de la multiplicación algebraica $A(x)B(x)$ definimos el producto como el resultado de la multiplicación algebraica, es decir, siendo $A(x)$ y $B(x)$ expresiones algebraicas obtendremos:

$$C(x) \text{ donde: } A(x)B(x) = C(x)$$

Si $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios $C(x)$ se denominará polinomio producto cumpliéndose que:

$$G[C(x)] = G[A(x)] + G[B(x)]$$

Para el cálculo del producto usaremos la ley conmutativa y distributiva de los reales:

$$ab = ba; a(b + c) = ab + ac$$

Ejemplo:

Multiplicar:

$$\bullet \quad A(x; y) = 2x^2y + 3y; B(x; y) = 5x + 2x^4y^2$$

Obtendremos:

$$\begin{aligned} A(x; y)B(x; y) &= (2x^2y + 3y)(5x + 2x^4y^2) \\ &= 10x^3y + 4x^6y^3 + 15xy + 6x^4y^3 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad P(x) = (x^2 - x + 1); Q(x) = x^3 + 4$$

Obtendremos:

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (x^2 - x + 1)(x^3 + 4) \\ P(x)Q(x) &= x^5 + 4x^2 - x^4 - 4x + x^3 + 4 \end{aligned}$$

Teorema

Si el grado de $P(x)$ es α con $(\alpha \geq 1)$, el grado de $P^n(x)$ será $n\alpha$ con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

Prueba:

Por ser $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$, $P^n(x)$ está definida como el producto $P^n(x) = \underbrace{P(x)P(x)P(x) \dots P(x)}_{n \text{ veces}}$

luego el grado de $P(x)$ será la suma de los grados de los polinomios iguales a $P(x)$, es decir:

$$GP^n(x) = \underbrace{G[P(x)] + G[P(x)] + G[P(x)] + \dots + G[P(x)]}_{n \text{ veces}}$$

$$\therefore G[P^n(x)] = n G[P(x)]$$

Ejemplo:

Siendo $P(x) = (x^2 + 2)^3$; $Q(x) = (x^4 - 1)^5$ y $R(x) = (x^7 - 2)^2$ hallar el grado de $P(x)Q(x) + Q(x)R(x)$

Resolución:

Recordemos que el grado de la suma estará dado por el grado del mayor sumando, entonces hallemos:

- Grado de $P(x)Q(x)$
 $= G[P(x)] + G[Q(x)] = 2 \times 3 + 4 \times 5 = 26$
- Grado de $Q(x)R(x)$
 $= G[Q(x)] + G[R(x)] = 4 \times 5 + 7 \times 2 = 34$

Luego el grado de la suma indicada será 34.

PRODUCTO NOTABLE

Es el producto que al adoptar cierta forma particular, evita que se efectúe la operación de multiplicación escribiendo directamente el resultado. Los principales productos notables son:

- **Trinomio cuadrado perfecto.** El desarrollo de un binomio al cuadrado nos da el cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Consecuencias:

- $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$
- $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$
- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

Identidades de Legendre

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Identidad de Lagrange

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

- **Diferencia de cuadrados.** El producto de dos binomios uno que presenta la suma de 2 expresiones y el otro la diferencia de las mismas expresiones es el cuadrado de la primera, menos el cuadrado de la segunda.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a^m + b^n)(a^m - b^n) = a^{2m} - b^{2n}$$

Consecuencias:

- $x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$; $x \in \mathbb{R}^+$; $y \in \mathbb{R}^+$
- $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^{2^n}+b^{2^n}) \dots$
 $= a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}$
- **Desarrollo de un trinomio al cuadrado.** Al desarrollar un trinomio al cuadrado se obtiene la suma de los cuadrados de los tres términos, más el doble de la suma de los productos tomados de dos en dos (productos binarios).

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

Consecuencia:

- $(ab+ac+bc)^2 = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 + 2abc(a+b+c)$
- **Multiplicación de binomios con un término en común.** Al multiplicar dos binomios con un término en común se obtiene: el común al cuadrado, más el producto de la suma de no comunes por el común, más el producto de no comunes, es decir:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Consecuencias:

- $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$
- $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
- $(x^m+a)(x^m+b) = x^{2m} + (a+b)x^m + ab$
- **Desarrollo de un binomio al cubo.** Al desarrollar un binomio al cubo se obtiene: el cubo del primer término, más el producto del triple del primero al cuadrado por el segundo, más el producto del triple del primero

por el segundo al cuadrado, más el cubo del segundo término.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Consecuencias:

- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$
- $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$
- **Suma y diferencia de cubos**

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

PROPIEDADES AUXILIARES

- **Desarrollo de un trinomio al cubo**
 $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$
 $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$
- **Producto de multiplicar binomios con un término común**
 $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
 $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
- **Identidad trinómica (Argan'd)**
 $(x^2+x+1)(x^2-x+1) = x^4 + x^2 + 1$
 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$
 En general:
 $(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m} y^{2n} + y^{4n}$
- **Identidades adicionales (identidad de Gauss)**
 - $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

- $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$
- $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

• Igualdades condicionales

Si: $a + b + c = 0$

Se verifican:

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
- $(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right) = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right) = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar el equivalente de la expresión:
 $1 + x(x+1)(x+2)(x+3)$

Resolución:

Efectuando los productos convenientemente:

$$1 + x(x+1)(x+2)(x+3)$$

$$1 + (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$$

Realizando el cambio de variable:

$$x^2 + 3x = k$$

$$\text{Luego: } 1 + k(k+2) = 1 + k^2 + 2k = (k+1)^2$$

$$\text{Reemplazando en: } (k+1)^2$$

$$(x^2 + 3x + 1)^2$$

2. Reducir: $(x + y + z)^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$

Resolución:

Desarrollando por productos notables y simplificando términos semejantes:

$$\begin{aligned} 3x^3 + 3y^3 + 3z^3 + 3x^2y + 3xz^2 + 3y^2x + 3y^2z + \\ 3z^2x + 3z^2y + 6xyz - 3x^3 - 3y^3 - 3z^3 - 3xy^2 - \\ 3xz^2 - 3yx^2 - 3yz^2 - 3zx^2 - 3zy^2 = 6xyz \end{aligned}$$

3. Sabiendo que $\frac{a}{x^9} + \frac{x^9}{a} = 7$, hallar el valor de

$$\text{la expresión: } 4\sqrt{\frac{a}{x^9}} + 4\sqrt{\frac{x^9}{a}}$$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable:

$$\frac{a}{x^9} = k \Rightarrow \frac{x^9}{a} = \frac{1}{k} \Rightarrow k + \frac{1}{k} = 7$$

$$\text{Además: } k + \frac{1}{k} + 2 = 7 + 2$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} = 3 \quad \dots (1)$$

$$\text{Se pide: } E = \sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{\frac{1}{k}}$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } E^2 = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\right)$$

$$\text{Pero de (1): } E^2 = (3 + 2) \Rightarrow E = \sqrt{5}$$

4. Evaluar la siguiente expresión:

$$(x - 3y)^2 - 4y(2y - x) + 8$$

$$\text{Si sabemos que: } (x - y) = 8$$

Resolución:

Llamando E a la expresión dada y efectuando operaciones:

$$E = x^2 - 6xy + 9y^2 - 8y^2 + 4xy + 8$$

$$E = x^2 - 2xy + y^2 + 8$$

$$E = (x - y)^2 + 8$$

$$\text{Pero por condición: } (x - y) = 8$$

$$\text{Reemplazando: } E = 8^2 + 8 = 72$$

5. Hallar el valor que asume la expresión:

$$U = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x + 2y}{2x} + \frac{2y}{x + 3y}$$

$$\text{si: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x + y}$$

Resolución:

Hallando la relación entre x e y de la condición del problema, se tiene:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x + y} \Rightarrow \frac{(y + x)}{xy} = \frac{4}{(x + y)}$$

$$(x + y)^2 = 4xy \Rightarrow (x + y)^2 - 4xy = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)^2 = 0$$

$$\text{Finalmente: } x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

Reemplazando en la expresión cuyo valor se pide, se tiene:

$$U = \frac{x^2 + x^2}{x(x)} + \frac{x + 2x}{2x} + \frac{2x}{x + 3x}$$

$$\therefore U = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

6. Simplificar la expresión:

$$E = \sqrt{\frac{\frac{2v^2 z^2}{gx^2}}{1 - \frac{2v^2 y^2 + gx^2}{gx^2}}} + 1$$

sabiendo que: $y^2 - z^2 = R^2$ **Resolución:**

Trabajando con el radicando:

$$E = \sqrt{\frac{\frac{2v^2 z^2}{gx^2}}{1 - \frac{2v^2 y^2 + gx^2}{gx^2}}} + 1; \text{ simplificando:}$$

$$E = \sqrt{-\frac{z^2}{y^2} + 1} = \sqrt{\frac{y^2 - z^2}{y^2}}; \text{ como: } y^2 - z^2 = R^2$$

$$\therefore E = \sqrt{\frac{R^2}{y^2}} = \frac{R}{y}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Efectuar:
 $(x+1)(x+2) - (x+3)^2 + (x-3)^2 - (x-4)(x-5)$
 a) -14 b) -16 c) -18
 d) -20 e) -22
- Reducir:
 $(x+3)^2 - (x+2)^2 + (x+4)^2 - (x+5)^2$
 a) -4 b) -3 c) -2
 d) -1 e) 0
- Efectuar:
 $4x^2 - (2x+1)^2 - 4(x+1)^2 + (2x+3)^2$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
- Reducir: $x^2 - (3x+1)(3x+2) + 2(2x+1)^2$
 a) -2x b) -x c) 0
 d) x e) 2x
- Efectuar:
 $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) - (x^2 - x - 7)^2$
 a) -25 b) -1 c) 49
 d) 25 e) 1
- Reducir:
 $(x^2 + 8x + 11)^2 - (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$
 a) 2 b) 4 c) 8
 d) 16 e) 20
- Reducir: $(a+b+5c)^2 + (a+b+4c)^2 - 2(a+b+c)(a+b+8c)$
 a) c^2 b) $4c^2$ c) $9c^2$
 d) $25c^2$ e) $16c^2$
- Efectuar: $(a+3b+c)^2 + (a+2b+c)^2 - 2(a+b+c)(a+4b+c)$
 a) $5a^2$ b) $5b^2$ c) $5c^2$
 d) $3a^2$ e) $4a^2$
- Si: $a+b+c=0$; reducir:
 $(2a+b+c)^3 + (a+2b+c)^3 + (a+b+2c)^3$
 a) -3 b) $3abc$ c) $-3abc$
 d) 3 e) 0
- Si: $a+2b+3c=0$; reducir:
 $\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a+3c}{b}\right)^2 + \left(\frac{2b+3c}{a}\right)^2$
 a) 6 b) 8 c) 10
 d) 12 e) 14
- Si: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$
 calcular: $R = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{x+3y}{2x}$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
- Si: $(x+y)^2 = 4xy$
 calcular: $P = \frac{x^2+y^2}{xy} + \frac{x+3y}{2x}$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
- Simplificar:
 $R = \frac{(a+b)(a^3-b^3) + (a-b)(a^3+b^3)}{2a^4 - 2b^4}$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4
14. Simplificar: $\frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
15. Si: $\frac{x+y+xy}{xy} = \frac{x+y+4}{x+y}$
calcular: $P = xy \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
16. Si: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$
calcular: $R = x^3 y^3 \left(\frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6} \right)$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
17. Si: $a = \sqrt{2} + 1 \wedge b = \sqrt{2} - 1$
calcular: $P = a^2 + b^2 + 3ab$
a) 2 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9
18. Si: $x - 1 = \sqrt[3]{2} \wedge y + 1 = \sqrt[3]{2}$
calcular: $R = x^3 + 3xy + 3xy^2 + y^3$
a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 32
19. Si: $x + y + z = 0$
hallar: $P = \left(\frac{x+y}{z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x}{y+z} \right)^2$
a) 1 b) 3 c) 6
d) 9 e) 12
20. Si: $a + b + c = 0$
calcular: $P = (a+b)(a+c)(b+c) + abc + 5$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
21. Calcular:
 $P = (1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2) + (x^6 + 1)$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
22. Calcular: $P = \sqrt[16]{(3)(5)(17)(257) + 1}$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
23. Si: $a + b + c = 0$
calcular: $R = \frac{(3a+b)^3 + (3b+c)^3 + (3c+a)^3}{(3a+b)(3b+c)(3c+a)}$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
24. Si: $a + b + c = 0$
calcular: $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(a+c)(b+c)}$
a) -1 b) -2 c) -3
d) -5 e) 3
25. Si: $x^4 - y^4 = 6 \wedge x^2 - y^2 = 3$
hallar: $R = (x+y)^2 + (x-y)^2$
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. c | 6. d | 11. d | 16. b | 21. b |
| 2. a | 7. d | 12. d | 17. e | 22. b |
| 3. d | 8. b | 13. b | 18. d | 23. c |
| 4. b | 9. b | 14. d | 19. d | 24. c |
| 5. a | 10. e | 15. b | 20. e | 25. d |

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DE LA DIVISIÓN

Sean $D(x)$, $d(x)$ dos polinomios no constantes. Al efectuar $D(x) \div d(x)$ se obtienen dos únicos polinomios $q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$\boxed{D(x) = d(x) q(x) + R(x)} \quad \dots (I)$$

Donde:

$D(x)$: polinomio dividendo

$d(x)$: polinomio divisor

$q(x)$: polinomio cociente

$R(x)$: polinomio residuo o resto.

Además:

- $R(x) \equiv 0 \Rightarrow G[R] < G[d]$
- Si en (I): $R(x) \equiv 0$ se dice que la división es exacta, luego se tendría:

$$\boxed{D(x) = d(x) q(x)} \quad \vee \quad \boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = q(x)}$$

- Si en (I): $R(x) \neq 0$ se dice que la división es inexacta, de aquí:

$$\boxed{D(x) = d(x) q(x) + R(x)}$$

$$\boxed{\frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}}$$

Ejemplo:

De la siguiente identidad:

$$x^3 + 2 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3$$

Se podría afirmar:

$$\left. \begin{array}{l} D(x) = x^3 + 2 \\ d(x) = x - 1 \end{array} \right\} \underbrace{G[D]}_3 \geq \underbrace{G[d]}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} q(x) = x^2 + x + 1 \\ R(x) = 3 \end{array} \right\} \underbrace{G[R]}_0 < \underbrace{G[d]}_1$$

Teoremas

- $G[q] = G[D] - G[d]$
- $G[R]_{\max} = G[d] - 1$

Ejemplo:

En la siguiente división:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2x^8 - x + 6x^3 - 3}{5x^4 + x + 6} \end{array} \right\} \begin{array}{l} G[D] = 8 \\ G[d] = 4 \end{array}$$

$$\text{Luego, } G[q] = 8 - 4 = 4$$

$$G[R]_{\max} = 4 - 1 = 3$$

Criterio general para dividir. Los polinomios dividiendo y divisor deberán de encontrarse completos (caso contrario se representará con ceros a los términos que faltan y por lo general ordenarlos en forma descendente).

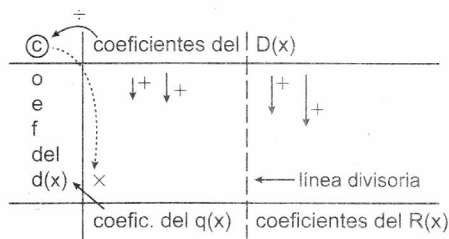
Ejemplo:

El polinomio: $P(x) = 3x^7 - 5x^3 + x^6 - 8$ es equivalente a: $P(x) = x^6 + 0x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 3x - 8$ y diremos que presenta a todos sus términos

MÉTODOS PARA DIVIDIR

Método de Horner. Es el más general y se utiliza para dividir polinomios de cualquier grado.

Esquema



Ubicar la línea divisoria contando en el esquema, de derecha a izquierda tantas columnas como el grado del divisor.

Ejemplo:

$$\text{Dividir: } \frac{4x^4 + 9x^3 + 6x^5 - 1}{x + 2x^3 - 1}$$

Resolución:

Preparando los polinomios:

$$D(x) = 6x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

$$d(x) = 2x^3 + 0x^2 + x - 1$$

Aplicando Horner:

	2	6	4	9	0	0	-1
→	0		0	-3	3	0	
→	-1			0	-2	2	
→	1		4	6	0	-3	3
×		3	2	3	1	-1	2
		coef. del q(x)			coef. del R(x)		

Como $D(x)$ y $d(x)$ presentan todos sus términos y están ordenados en forma descendente, entonces $q(x)$ y $R(x)$ también deben presentar todos sus términos y están ordenados descendientemente.

Además como:

$G[q] = 5 - 3 = 2$ y $G[R]_{\max} = 3 - 1 = 2$, se tiene:

$$q(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

$$R(x) = 1x^2 - 1x + 2 = x^2 - x + 2$$

Regla de Ruffini. Es un caso particular del método de Horner y se usará cuando el divisor es de primer grado o transformable a un polinomio lineal.

Esquema de cocientes

Suponiendo que el divisor tiene la forma:

$$ax + b; a \neq 0$$

		coeficientes del $D(x)$		
		↓	↓	↓
		+	+	+
$x = -\frac{b}{a}$	×			
		coeficientes del $q(x)$		
				Resto

En el esquema de Ruffini el resto obtenido siempre es una constante.

Ejemplos:

1. Dividir: $\frac{3x^4 - 7x^2 + 2x^3 - x + 5}{3x - 1}$

Resolución:

		+	+	+	+
$3x - 1 = 0$	3	2	-7	-1	5
$x = 1/3$	↓	1	1	-2	-1
×	3	3	-6	-3	4
	3	3	-6	-3	4
	1	1	-2	-1	
	Coef. del $q(x)$				

Como $G[q] = 4 - 1 = 3$, se tiene:

$$q(x) = 1x^3 + 1x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$\text{Resto} = 4$$

2. Dividir: $\frac{x^3 - 2x - 3}{x - 2}$

Resolución:

$x - 2 = 0$	1	0	-2	-3
$x = 2$	↓	2	4	4
	1	2	2	1
	1	2	2	1
	Coef. del $q(x)$			

Como: $G[q] = 3 - 1 = 2$

Tenemos: $q(x) = x^2 + 2x + 2$

$$\text{Resto} = 1$$

TEOREMA DEL RESTO

Finalidad. Obtener el resto de ciertas divisiones sin necesidad de efectuar la división.

Enunciado. Sea $P(x)$ un polinomio no constante. El resto de dividir $P(x)$ entre $(x - m)$ viene dado por $P(m)$.

Es decir: $\frac{P(x)}{x - m} \Leftrightarrow R = P(m)$ R: resto

Ejemplos:

• $\frac{P(x)}{x - 3} \Leftrightarrow R = P(3)$ • $\frac{Q(x)}{x + 6} \Leftrightarrow R = Q(-6)$

REGLA PRÁCTICA

- El divisor se iguala a cero ($x - m = 0$).
- Se despeja la variable ($x = m$).
- Se reemplaza en el dividendo obteniéndose el resto $R = P(m)$.

Ejemplo:

Halle el resto en: $\frac{2x^5 + x - 60}{x - 2}$

Resolución:

Haciendo uso de la regla práctica:

- $x - 2 = 0$
- $x = 2$
- $R = 2(2)^5 + 2 - 60 \Rightarrow R = 6$

Corolario. Sea $P(x)$ un polinomio no constante. El resto de dividir $P(x)$ entre $(ax + b)$, donde $a \neq 0$, viene dado por $(-b/a)$, es decir:

$$\frac{P(x)}{ax + b} \Rightarrow R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Ejemplo:

Halle el resto de dividir: $\frac{2x^2 + 5x + 7}{2x - 1}$

Resolución:

Siguiendo con la regla práctica, antes mencionada.

- $2x - 1 = 0$
- $x = 1/2$
- $R = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 7$
- $R = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 7 \Rightarrow R = 10$

COCIENTES NOTABLES (CN)

Se denomina cocientes notables, a ciertos cocientes de tal forma que sin efectuar la división, se puede escribir su desarrollo. Se caracterizan por ser cocientes exactos.

Forma general de los cocientes notables. Todo cociente notable se puede presentar de la siguiente forma general: $\frac{x^m + a^m}{x + a}$ donde se observa:

1. El dividendo y el divisor tienen cada uno dos términos.
2. Las bases del dividendo y divisor (x , a), respectivamente, son iguales.

3. Los exponentes en cada uno de los términos del dividendo son iguales.
4. Hay cuatro formas de cocientes notables, que se obtienen combinando los signos:

$$\left(\frac{+}{+}, \frac{+}{-}, \frac{-}{+}, \frac{-}{-}\right)$$

Como consecuencia se presentan 4 casos:

Estudio del primer caso: $\frac{x^m + a^m}{x + a}$

Aplicando el teorema del resto, regla práctica:

- $x + a = 0$
- $x = -a$
- $R = (-a)^m + a^m = 0$

Hay dos casos:

Que m sea par, luego:

$$R = (-a)^m + a^m = a^m + a^m = 2a^m \neq 0$$

No es cociente notable, porque el resto es diferente de cero.

Que m sea impar, luego:

$$R = (-a)^m + a^m = -a^m + a^m = 0$$

Sí es cociente notable.

Conclusión: La forma $\frac{x^m - a^m}{x + a}$ es CN cuando m es impar.

Estudio del segundo caso: $\frac{x^m - a^m}{x + a}$

Cálculo del resto:

- $x + a = 0$
- $x = -a$
- $R = (-a)^m - a^m$

Para que sea cero, m debe ser número par, así:

$$R = a^m - a^m = 0$$

Conclusión: La forma $\frac{x^m - a^m}{x + a}$ es CN cuando m es un número par.

Estudio del tercer caso: $\frac{x^m + a^m}{x - a}$

Cálculo del resto:

- $x - a = 0$
- $x = a$
- $R = (a)^m + a^m = 2a^m \neq 0$

Como el resto es diferente de cero, no es CN

Conclusión: La forma $\frac{x^m + a^m}{x - a}$ no es cociente notable para ningún valor de m .

Estudio del cuarto caso: $\frac{x^m - a^m}{x - a}$

Cálculo del resto:

- $x - a = 0$
- $R = (a)^m - a^m = 0$
- $x = a$

Conclusión: La forma $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ es cociente notable para cualquier valor de m .

Desarrollo del cociente notable. Para desarrollar el CN se realiza la división por Ruffini, aplicado a un caso, pero se generaliza para los tres casos de cocientes notables con las reglas prácticas que se hará al final de la demostración.

Sea el CN $\frac{x^m + a^m}{x + a}$ para $m =$ número impar.

Dividiendo por Ruffini:

	1	0	0	0 ...	$+a^m$
$-a$	↓	$-a$	$+a^2$	$-a^3$	$-a^m$
	1	$-a^1$	$+a^2$	$-a^3 ...$	$+a^{m-1}$
					0

El cociente es de grado $= m - 1$

$$q(x) = x^{m-1} - x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 + \dots + a^{m-1}$$

$$\therefore \frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 - x^{m-4}a^3 + \dots + a^{m-1}$$

Reglas prácticas para escribir del desarrollo de cualquier cociente notable

1. El primer término del cociente es igual al cociente entre el primer término del dividendo y el primer término del divisor.
2. El último término del cociente es igual al cociente entre el segundo término del dividendo y el segundo término del divisor.
3. A partir del segundo término del cociente el exponente de x comienza a disminuir de 1 en 1 hasta el valor final.
4. También a partir del segundo término del cociente, aparece a con exponente 1 y en cada término posterior su exponente aumenta de 1 en 1 hasta $m - 1$.
5. Para los signos de cada término se debe tener en cuenta:

- Cuando el divisor es de la forma $(x + a)$ los signos de los términos del cociente son alternados $(+)$ y $(-)$ comenzando por $(+)$.
- Cuando el divisor es de la forma $(x - a)$ los signos de los términos del cociente son positivos.

Nota:

El dividiendo en ambos casos $(a + b)$ puede ser $(x^m + a^m)$ o $(x^m - a^m)$

Ejemplos:

1. $\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4$
2. $\frac{x^6 - a^6}{x - a} = x^5 + x^4a + x^3a^2 + x^2a^3 + xa^4 + a^5$
3. $\frac{x^8 - a^8}{x - a} = x^7 + x^6a + x^5a^2 + x^4a^3 + x^3a^4 + x^2a^5 + xa^6 + a^7$
4. $\frac{x^{10} + a^{20}}{x^2 + a^4} = \frac{(x^2)^5 + (a^4)^5}{(x^2) + (a^4)} = (x^2)^4 - (x^2)^3(a^4) + (x^2)^2(a^4)^2 - (x^2)(a^4)^3 + (a^4)^4$

o en forma inmediata:

$$\frac{x^{10} + a^{20}}{x^2 + a^4} = x^8 - x^6a^4 + x^4a^8 - x^2a^{12} + a^{16}$$

Determinación de un término cualquiera de un cociente notable. En forma general:

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = x^{m-1} \mp x^{m-2}a^1 + x^{m-3}a^2 \mp x^{m-4}a^3 + x^{m-5}a^4 \mp \dots \mp a^{m-1}$$

Deducción de la fórmula, para el término k .

- 1.º término: (signo) $x^{m-1}a^1 - 1$
- 2.º término: (signo) $x^{m-2}a^2 - 1$
- 3.º término: (signo) $x^{m-3}a^3 - 1$
- 4.º término: (signo) $x^{m-4}a^4 - 1$
- ...
- 10.º término: (signo) $x^{m-10}a^{10} - 1$
- ...
- k .º término: (signo) $x^{m-k}a^k - 1$

$$\therefore t_k = (\text{signo}) x^{m-k}a^k - 1$$

Regla para el signo

1. Cuando el divisor es de la forma $(x - a)$ el signo de cualquier término es positivo.
2. Cuando el divisor es de la forma $(x + a)$ el signo de los términos que ocupan un lugar par son negativos y los que ocupan un lugar impar son positivos.

Ejemplo:

Hallar el t_{25} y t_{40} en el desarrollo del CN:

$$\frac{x^{150} - a^{100}}{x^3 + a^2}$$

Resolución:

Dando la forma de CN: $\frac{(x^3)^{50} - (a^2)^{50}}{(x^3) + (a^2)}$; de donde:

1.^a base del divisor: (x^3)

2.^a base del divisor: (a^2)

$$m = 50$$

$$\text{Para } k = 25: t_{25} = + (x^3)^{50-25} (a^2)^{25-1}$$

$$t_{25} = + x^{75} a^{48}$$

$$\text{Para } k = 40: t_{40} = - (x^3)^{50-40} (a^2)^{40-1}$$

$$t_{40} = - x^{30} a^{78}$$

Condición necesaria y suficiente para que el

cociente $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ sea notable. Establecidas las

condiciones de divisibilidad el cociente $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ será notable cuando:

$$\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} = \frac{(x^p)^r \pm (a^q)^r}{x^p \pm a^q}$$

$$\text{donde: } pr = m \Rightarrow r = m/p \quad \dots (\alpha)$$

$$qr = n \Rightarrow r = n/q \quad \dots (\beta)$$

Es decir, los cocientes entre m/p y n/q , deben ser enteros e iguales.

Número de términos del cociente notable. De (α) y (β) :

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{número de términos del cociente notable}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es el residuo de la siguiente división?
 $(3m^5 - 2m^4 + 3m^3 - 2m^2 - m - 1) : (m - 2)$

Resolución:

Aplicando el teorema del resto:

$$d = m - 2$$

$$D = P(m) = 3m^5 - 2m^4 + 3m^3 - 2m^2 - m - 1$$

$$\text{Haciendo } d = 0, \text{ es decir: } m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$R = P(2) = 3(2)^5 - 2(2)^4 + 3(2)^3 - 2(2)^2 - 2 - 1$$

$$\therefore R = 77$$

2. Dado el polinomio: $6x^3 - 3x^2 - mx - 6$ determinar el valor de m para que sea divisible por $(2x - 3)$

Resolución:

Si una expresión es divisible entre otra, esto implica que si se efectúa la división entre ambas el residuo será nulo.

Aplicando el teorema del resto y una vez hallado este residuo se iguala a cero, por condición de divisibilidad, y se calcula m .

Para hallar el residuo se hace:

$$d = 0, \text{ es decir: } 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$$

$$R = P\left(\frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)m - 6$$

Pero por condición de divisibilidad: $R = 0$

Efectuando e igualando a cero resulta: $m = 5$

3. Determinar $m + n$ para que el polinomio:
 $4x^4 + 2x^3 - mx^2 + 3x + n$
sea divisible por $x^2 - 2x + 1$. Hallar: $m + n$

Resolución:

Por condición de divisibilidad: "Si se dividen dos expresiones algebraicas divisibles, el residuo deberá ser idénticamente nulo". Efectuando la división por Horner:

1	4	2	-m	3	n
2		8	-4		
-1			20	-10	
				$2(16 - m)$	$(m - 16)$
	4	10	$(16 - m)$	$(25 - 2m)$	$(m + n - 16)$
				$R = 0$	

$$\text{Entonces: } 25 - 2m = 0 \quad \dots (1)$$

$$m + n - 16 = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{De (2): } m + n = 16$$

4. Hallar el residuo de la división de:
 $2x^5 + 7x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 22x + 60$
 entre $x^2 - 2x - 15$

Resolución:

Efectuando la división por el método de Horner.

1	2	7	-50	-173	-22	60
2		4	30			
15			22	165		
				4	30	
					-8	-60
	2	11	2	-4	0	0
						Residuo

$$\therefore R = 0$$

5. Qué valores deberán tomar a y b para que el polinomio: $x^5 - ax + b$ sea divisible entre: $x^2 - 4$

Resolución:

Por condición de divisibilidad: "Si se dividen dos expresiones algebraicas divisibles, el residuo será idénticamente nulo" Efectuando la división por Horner:

1	1	0	0	0	-a	b
0		0	4			
4			0	0		
				0	16	
					0	0
	1	0	4	0	(16 - a)b	
						R = 0

$$\text{Entonces: } 16 - a = 0 \Rightarrow a = 16$$

$$b = 0 \Rightarrow b = 0$$

6. ¿Cuál deberá ser el valor de m para que el polinomio: $x^3 + m(a - 1)x^2 + a^2(mx + a - 1)$ sea divisible entre $x - a + 1$?

Resolución:

Aplicando el teorema del resto para hallar el residuo en dicha división y por condición de divisibilidad, se iguala el residuo a cero.

$$D = P(x) = x^3 + m(a - 1)x^2 + a^2(mx + a - 1)$$

$$d = x - a + 1$$

$$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow x - (a - 1) = 0 \Rightarrow x = (a - 1)$$

$$R = P(a - 1) = (a - 1)^3 + m(a - 1)(a - 1)^2 + a^2[m(a - 1) + (a - 1)]$$

$$R = (a - 1)^3 + m(a - 1)^3 + a^2(a - 1)(m + 1)$$

$$R = (a - 1)^3[1 + m] + a^2(a - 1)[1 + m]$$

$$R = (a - 1)(1 + m)(2a^2 - 2a + 1)$$

$$\text{Pero: } R = 0$$

$$\Rightarrow m + 1 = 0 \quad \therefore m = -1$$

7. Simplificar:

$$E = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}$$

Resolución:

Sumando todos menos el último sumando:

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}}$$

$$= \frac{a^n + a^{n-1}x + a^{n-2}x^2 + a^{n-3}x^3 + \dots + x^n}{a^{n+1}}$$

Escribiendo el numerador como CN:

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \dots + \frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a - x}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}; \text{ sustituyendo en la expresión:}$$

$$E = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)} + \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}$$

$$E = \frac{a^{n+1} - x^{n+1} + x^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)}$$

$$E = \frac{a^{n+1}}{a^{n+1}(a - x)} = \frac{1}{a - x} = (a - x)^{-1}$$

8. Hallar el término independiente del cociente:

$$\frac{(x + a)^n - a^n}{x}$$

Resolución:

Dando la forma de CN y desarrollando:

$$\frac{(x + a)^n - a^n}{(x + a) - a} = (x + a)^{n-1} + (x + a)^{n-2}a^1 + (x + a)^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}$$

El término independiente del CN es:

$$P(0) = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}a^1 + a^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}}_{n \text{ términos}}$$

$$\therefore P(0) = na^{n-1}$$

9. Simplificar:

$$E = \frac{x^{78} + x^{76} + x^{74} + \dots + x^4 + x^2 + 1}{x^{38} + x^{36} + x^{34} + \dots + x^4 + x^2 + 1}$$

Resolución:

Escribiendo el numerador y denominador como CN:

$$E = \frac{(x^2)^{40} - 1^{40}}{x^2 - 1}; \text{ efectuando y simplificando:}$$

$$E = \frac{x^{80} - 1}{x^{40} - 1} \Rightarrow E = \frac{(x^{40})^2 - 1^2}{x^{40} - 1}$$

$$\therefore E = \frac{(x^{40} + 1)(x^{40} - 1)}{(x^{40} - 1)} = x^{40} + 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Indique verdadero (V) o falso (F) en las proposiciones siguientes:

I. Si $R(x) = 0$; $D(x) = d(x)q(x)$

II. $G[q(x)] = G[D(x)] + G[d(x)]$

III. Para efectuar la división, se completa y ordena en forma creciente al dividendo y al divisor.

- a) VFF b) VVF c) FVV
d) VFF e) FVF

2. Hallar el cociente de dividir:

$$\frac{12x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 8x - 3}{2x^2 + x - 3}$$

- a) $6x^2 + 4x + 3$ b) $6x^2 - 4x + 3$
c) $6x^2 + 4x - 3$ d) $6x^2 - 4x - 3$
e) $6x^2 + 4x$

3. Al dividir: $\frac{2 - 5x + 6x^2 - 7x^3 + x^4}{x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$ dar como

respuesta la suma de coeficientes del residuo.

- a) 4 b) -4 c) -1
d) 1 e) 0

4. Al efectuar: $\frac{4x^4 - x^2 - ax + b}{2x^2 + x - 1}$ se obtiene por

resto: $R(x) = 8x - 4$. Calcular: ab^{-1}

- a) $1/50$ b) 2 c) -1
d) $1/2$ e) 3

5. Si la siguiente división: $\frac{6x^4 + 16x^3 + 25x^2 + Mx + N}{1 + 2x + 3x^2}$

tiene residuo: $R(x) \equiv 0$, señalar: $\sqrt[3]{M + N + 8}$

- a) 2 b) -2 c) 3
d) -3 e) d1

6. El resto de la división: $\frac{x^3 - 4x^2 + px - p}{x^2 - 3x - 2}$

es una constante, hallar dicho resto aumentado en p.

- a) 1 b) -1 c) 0
d) -2 e) 2

7. Si los coeficientes del cociente de dividir:

$$\frac{ax^2 + bx + c + 8x^4 + 18x^3}{2x + 3}$$

son números consecutivos y el residuo es (-8) , señalar: $(a + b + c)^{0.5}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

8. La siguiente división:

$$\frac{mx^5 + nx^4 - x^3 + 7x^2 - 5x - 12}{3x^2 + x - 4}$$

es exacta. Calcular: mn

- a) 10 b) 15 c) 24
d) 30 e) 42

9. A partir de la división: $\frac{25x^4 + 5x^3 + bx^2 + 3(x + 1)}{5x^2 - 3(x + 1)}$

calcular su cociente evaluado en 1, sabiendo que su resto es: $5cx$.

- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

10. Después de dividir:

$$\frac{6x^4 + 11x + 7(x+1)(x^2 - x + 1)}{x - \frac{1}{3}}$$

señalar el coeficiente del término lineal del cociente.

- a) 2 b) 3 c) 6
d) 9 e) 12

11. Proporcionar el cociente de dividir:

$$\frac{x^3 + (b-a)x^2 + (b-a)x + a - ab}{x - a}$$

- a) $x^2 + ax + a$ b) $x^2 + bx + b$
c) $x^2 + ax + b$ d) $x^2 + bx + a$
e) $x^2 + bx + (b - a + ab)$

12. Al dividir:

$P(x) = x^3 + (-2 - \sqrt{7})x^2 + (2\sqrt{7} - 15)x + 15\sqrt{7} + k$
entre $x - \sqrt{7}$, se encontró un residuo $3k - 8$.
Encontrar k.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Determinar el valor de a en la división:

$$\frac{25x^4 + (x+a)^2 + 2}{2+5x}$$

si el valor numérico de su cociente para $x = 0$ es igual a 2.

- a) 1 b) 2 c) 4
d) 3 e) 6

14. Determinar el residuo de la división:

$$\frac{px^5 + 2qx^4 + (3r-p)x^3 + (p-2q)x^2 + (2q-p)x + p}{x-1}$$

si la suma de coeficientes del cociente es 54.

- a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 19

15. Considerando el siguiente esquema de Horner:

2	2	1	4	b_1	b_2
1					
3					
	b_3	b_4	b_5	1	1

calcular: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$

- a) 10 b) -11 c) 12
d) -13 e) 14

16. La siguiente división:

$$\frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{x+1}$$

se realiza empleando la regla de Ruffini, obteniéndose el esquema:

	A	B	C	D	E	F
-1		1	3	5	7	9
	m	n	p	q	r	0

hallar la suma de coeficientes del dividendo.

- a) -25 b) 50 c) 0
d) 25 e) -50

17. Si al efectuar la división:

$(6x^4 + Ax^3 - 14x^2 + Bx - 5) : (-5 + x + 2x^2)$
se obtuvo como residuo al polinomio $(3x + 5)$,
calcular: $\sqrt[4]{A+B-1}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0

18. Hallar el residuo de dividir:

$$\frac{amx^3 + (an+bm)x^2 + (ap+bn)x + bp}{ax+b}$$

- a) 1 b) -1 c) bn
d) 2bn e) 0

19. Al efectuar la división: $\frac{2x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4x + \lambda}$

se obtiene un residuo de primer grado. Proporcionar dicho residuo.

- a) $14x + 3$ b) $14x - 3$
c) $7(2x + 1)$ d) $7(2x - 1)$
e) $7(2x + 3) - 20$

20. Si: $15x^4 + 7x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se divide entre $5x^2 - x + 3$, se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de 1 en 1 a partir del principal y un resto $2x + 5$. Calcular:

$$\sqrt[3]{-A-B-C}$$

- a) -3 b) -2 c) -1
d) 2 e) 3

21. Luego de dividir: $\frac{6x^3 - 19x^2 + 19x - 16}{3x - 2}$

hallar la suma del cociente con el residuo.

- a) $2x^2 + 5x + 7$ b) $2x^2 - 5x + 7$
 c) $2x^2 + 5x - 7$ d) $2x^2 - 5x - 7$
 e) $2x^2 + 5x$
22. Obtener la suma de coeficientes del cociente disminuida con el resto de la división:

$$\frac{2(x+1)^3 - 3x^2 - x + 3}{2x + 1}$$

- a) 5 b) 4 c) 3
 d) 2 e) 1

23. Calcular $(m + 2n)$, si el resto de:

$$\frac{4x^4 - x^2 + mx + n}{2x^2 + x - 3} \text{ es: } 2x + 5$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

24. Si el cociente de dividir: $\frac{6x^3 - 13x^2 - 3x - 3}{2x - 5}$

es de la forma $mx^2 + nx + p$, calcular:

$$m^{n+p} + (n+p)^m$$

- a) 8 b) 12 c) 14
 d) 17 e) 57

25. Si el residuo de la división:

$$\frac{2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + x^5 + ax + b}{x^2 - x - 1}$$

es $R(x) = 26x + 17$, hallar la alternativa correcta.

- a) $a = b$ b) $a + b = 0$ c) $ab = 0$
 d) $a + b = 1$ e) $a + b + 1 = 0$
26. Calcular a y b , si al efectuar la siguiente división:

$$\frac{ax^5 + bx^4 + 2x^3 - x^2 - 11x + 6}{3x^2 + x - 2} \text{ el residuo es}$$

idénticamente nulo.

- a) 12 y -2 b) 10 y 2 c) -10 y 8
 d) 8 y -12 e) 6 y -3

- 27.Cuál es el valor de m para que la división:

$$\frac{x^3 + m(a-1)x^2 + a^2(mx + a - 1)}{x - a + 1} \text{ posea resi-}$$

duo idénticamente nulo.

- a) 1 b) a c) $-a$
 d) $a + 1$ e) -1

28. Si la división indicada:

$$\frac{(a^2 - b^2)x^3 + (2ab - 2b^2)x^2 + 4abx + 2b^2 - ab}{(a + b)x + b - a}$$

es exacta, hallar: $(a^2 + b^2)(ab)^{-1}$

- a) 0 b) 1 c) -1
 d) 0,5 e) -0,5

29. El esquema:

	2	a_0	-5	2	a_1	a_2
a_3		-6	a_4	a_5	3	-12
	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}

corresponde a la división de dos polinomios por la regla de Ruffini. Obtener: $a_0 + a_4 + a_8$

- a) 8 b) 11 c) 5
 d) 0 e) 3
30. Al efectuar la división:

$$\frac{ax^5 + bx^4 + (c-a)x^3 + (a-b)x^2 + (b-a)x + a}{x-1}$$

el resto que se obtiene es 9. Señalar la suma de coeficientes del cociente.

- a) 15 b) 21 c) 27
 d) 36 e) 45

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. d | 7. d | 13. e | 19. a | 25. a |
| 2. b | 8. d | 14. d | 20. a | 26. a |
| 3. b | 9. d | 15. b | 21. d | 27. e |
| 4. b | 10. b | 16. e | 22. e | 28. b |
| 5. c | 11. e | 17. b | 23. c | 29. b |
| 6. d | 12. d | 18. e | 24. d | 30. c |

FACTORIZACIÓN

FACTOR ALGEBRAICO

Se dice que $N(x)$ es un factor algebraico de $P(x)$ de grado $n \geq 1$; si existe un polinomio $M(x)$ tal que $P(x) = N(x)M(x)$, es decir, $N(x)$ es un factor de $P(x)$ si la división de $P(x)$ entre $N(x)$ es exacta.

Ejemplos:

- $P(x) = (x + 1)(x + 3)$
Sus factores algebraicos son: $x + 1$; $x + 3$;
 $(x + 1)(x + 3)$
- $Q(x) = (x + 3)(x + 4)(x + 6)$
Sus factores son: $x + 3$; $x + 4$; $x + 6$;
 $(x + 3)(x + 4)$, $(x + 3)(x + 6)$; $(x + 4)(x + 6)$;
 $(x + 3)(x + 4)(x + 6)$

Teorema

Dado el polinomio mónico: $P(x) = (x + a)^\alpha (x + b)^\beta$
El número de factores algebraicos es: $(\alpha + 1)(\beta + 1)$

Nota:

No se considerará como factor a la unidad o cualquier constante.

Polinomio reductible. Un polinomio P de grado $n \geq 1$ es reductible en un campo numérico si el polinomio se puede descomponer sobre este campo en la multiplicación de dos polinomios de grado menores que n .

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 3$$

$P(x)$ es reductible en \mathbb{R} , es decir:

$$P(x) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Polinomio irreductible. Un polinomio de grado n ($n \geq 1$) es irreductible sobre un campo si en cualquiera de sus descomposiciones uno de ellos es de grado cero y el otro de grado n .

Ejemplos:

- $P(x) = 3x + 12$
Se transforma en $P(x) = 3(x + 4)$
 $\therefore P(x)$ es primo en \mathbb{Q} y \mathbb{R}

- $N(x) = x^2 + n$; ($n > 0$)
 $N(x)$ es primo en \mathbb{Q} y \mathbb{R}
- $R(x) = x^2 + p$, $p < 0$; p no es cuadrado perfecto
Entonces $R(x)$ es primo en \mathbb{Q}

Propiedades de los polinomios irreductibles en un campo numérico

- Todo polinomio de primer grado es irreductible.
- Si el polinomio P es irreductible lo es también cualquier polinomio cP donde c es un elemento de dicho campo ($c \neq 0$).

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio de grado n ($n \neq 2$) reductible sobre un campo numérico, es un procedimiento que consiste en transformar dicho polinomio, en una multiplicación indicada de factores primos sobre un campo numérico.

Ejemplo:

$$\text{Factorice } P(x) = x^4 - 1 \text{ en } \mathbb{Q}$$

Resolución:

Aplicando diferencia de cuadrados:

$$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

CRITERIOS PARA FACTORIZAR

Criterio del factor común. Consiste en buscar factores comunes a todos los términos de un polinomio para luego extraerlos.

Ejemplos:

- Factorice:
 $P(x; y) = 4x^2y + 5xy^2 + xy = x(4xy + 5y^2 + y)$
 $P(x; y) = xy(4x + 5y + 1)$
Luego el polinomio presenta 3 factores primos: x ; y ; $4x + 5y + 1$
- Factorice:
 $Q(x; y) = (x + 3)y + (x + 3)x + (x + 3)$
 $Q(x; y) = (x + 3)(y + x + 1)$
Luego, el polinomio presenta dos factores primos: $(x + 3)$, $(y + x + 1)$

Agrupaciones. Consiste en agrupar términos convenientemente tratando que aparezca algún factor común.

Ejemplos:

- Factorice:

$$P(x; y; z) = x^2 + xy + zx + zy + x + y$$

$$P(x; y; z) = x(x + y) + z(x + y) + (x + y)$$

$$P(x; y; z) = (x + y)[x + z + 1]$$

Luego, el polinomio presenta dos factores primos: $(x + y)$; $[x + z + 1]$

- Factorice:

$$P(a; b; c) = a^2 + ab + ac + a^3 + a^2b + a^2c$$

$$P(a; b; c) = a(a + b + c) + a^2(a + b + c)$$

$$P(a; b; c) = (a + b + c)[a + a^2]$$

$$P(a; b; c) = (a + b + c)a(1 + a)$$

Luego, el polinomio presenta tres factores primos: $(a + b + c)$; a ; $(1 + a)$

Identidades. Por identidades algebraicas.

Ejemplos:

- Factorice:

$$P(a; b; c) = a^2 + b^2 + c^2 + a + 2ab + b + 2ac + c + 2bc$$

$$P(a; b; c) = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) + (a + b + c)$$

$$P(a; b; c) = (a + b + c)^2 + (a + b + c) \cdot 1$$

$$P(a; b; c) = (a + b + c)(a + b + c + 1)$$

Luego, el polinomio presenta dos factores primos: $(a + b + c)$; $(a + b + c + 1)$

- Factorizar:

$$P(x; y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - (x^2 + y^2)(1 + y^2)$$

$$P(x; y) = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(1 + y^2)$$

$$P(x; y) = (x^2 + y^2)[x^2 + y^2 - 1 - y^2]$$

$$P(x; y) = (x^2 + y^2)^2[x^2 - 1]$$

$$P(x; y) = (x^2 + y^2)(x + 1)(x - 1)$$

Luego, el polinomio presenta tres factores primos: $(x^2 + y^2)$; $(x + 1)$; $(x - 1)$

Aspa simple. Forma general de polinomio a factorizar.

$$P(x; y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$$

$$P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C$$

Donde: $m; n \in \mathbb{N}$

Procedimiento: se descompone los extremos tratando de buscar el término central.

$$P(x; y) = Ax^{2n} + Bx^ny^m + Cy^{2m}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1x^n & & c_1y^m \rightarrow a_2c_1x^ny^m \\ & \searrow & \nearrow \\ & Bx^ny^m \text{ (término central)} & \\ & \nearrow & \searrow \\ a_2x^n & & c_2y^m \rightarrow a_1c_2x^ny^m \end{array}$$

$$\text{Donde: } Bx^ny^m = (a_2c_1 + a_1c_2)x^ny^m$$

$$\text{Luego: } P(x; y) = (a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n + c_2y^m)$$

Nota:

- $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0 \wedge a; b; c \in \mathbb{Q}$ es factorizable en $\mathbb{Q} \Leftrightarrow b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto.
- $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0 \wedge a; b; c \in \mathbb{R}$ es factorizable en $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0$

Ejemplos:

$$P(x) = x^2 + 5x + 1$$

Analizando el discriminante se tiene:

$$\Delta = 5^2 - 4(1)(1) \geq 0$$

$\therefore P(x)$ es factorizable en \mathbb{R} ; pero primo en \mathbb{Q}

$$P(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

Analizando el discriminante

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(1) \Rightarrow \Delta = 1$$

Ejemplos:

- Factorizar:

$$P(x; y) = 3x^2 + 20xy + 12y^2$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & 2y \rightarrow 2xy \\ & \searrow & \nearrow \\ & +6y & \rightarrow 18xy \\ & \nearrow & \searrow \\ x & & 20xy \end{array} \quad (+)$$

Luego: $P(x; y) = (3x + 2y)(x + 6y)$, el polinomio presenta dos factores primos.

- Factorice:

$$P(x) = 14x^2 - 3x - 11$$

$$\begin{array}{ccc} 14x & & 11 \Rightarrow 11x \\ & \searrow & \nearrow \\ & -1 & \Rightarrow -14x \\ & \nearrow & \searrow \\ x & & -3x \end{array} \quad (+)$$

Luego:

$$P(x) = (14x + 11)(x - 1)$$

El polinomio presenta dos factores primos.

Aspa doble. Forma general del polinomio a factorizar.

$$P(x; y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$

$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5 \quad t_6$

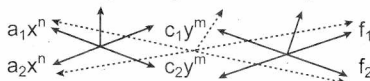
Donde: $m; n \in \mathbb{N}$

Procedimiento:

Se aplica dos veces aspa simple en los siguientes términos: $t_1, t_2, t_3 \wedge t_3, t_5, t_6$

Finalmente solo para comprobar se aplica otra aspa simple con: t_1, t_4, t_6

$$P(x; y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$

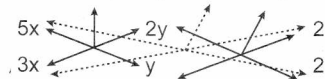


$$\text{Luego: } P(x; y) = (a_1x^n + c_1y^m + f_1)(a_2x^n + c_2y^m + f_2)$$

Ejemplo:

Factorizar:

$$P(x; y) = 15x^2 + 11xy + 2y^2 + 16x + 6y + 4$$



Luego: $P(x; y) = (5x + 2y + 2)(3x + y + 2)$
el polinomio presenta dos factores primos.

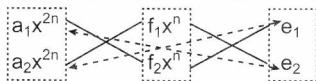
Aspa doble especial. Forma general del polinomio a factorizar.

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$$

Donde: $n \in \mathbb{N}$

Procedimiento: Se descompone los extremos tratando de buscar un aproximado al término central:

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$$



Balance:

$$\text{Tenemos: } (a_1e_2 + a_2e_1)x^{2n}$$

$$\text{Falta: } (C - a_1e_2 - a_2e_1)x^{2n} = \boxed{Fx^{2n}} = (f_1x^n)(f_2x^n)$$

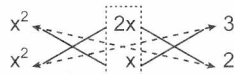
Luego:

$$P(x) = (a_1x^{2n} + f_1x^n + e_1)(a_2x^{2n} + f_2x^n + e_2)$$

Ejemplo:

Factorice:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$



Balance:

$$\text{Tenemos: } 5x^2$$

$$\text{Falta: } 7x^2 - 5x^2 = \boxed{2x^2}$$

$$P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 2)$$

El polinomio presenta dos factores cuadráticos primos $(x^2 + 2x + 3); (x^2 + x + 2)$.

Divisores binómicos. Se aplica para factorizar polinomios que admiten por lo menos un factor lineal.

Raíz de un polinomio. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$.

$$a \text{ es raíz de } P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Es decir, raíz es el valor que anula al polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = x^3 + 7x - 8$$

$$x = 1 \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1 \text{ es raíz de } P(x)$$

Posibles raíces racionales (PRR)

$$\text{Sea: } P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde: $a_0, a_n \neq 0$

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores de } |a_n|}{\text{Divisores de } |a_0|} \right\}$$

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$$

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{\text{Divisores de } 3}{\text{Divisores de } 2} \right\}$$

$$\text{PRR} = \pm \left\{ \frac{1; 3}{1; 2} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; 3; \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{PRR} = \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 3; \pm \frac{3}{2}$$

Luego el polinomio $P(x)$ posiblemente se anule para algunos de estos valores.

$$\text{Si: } x = 1 \Rightarrow P(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 \text{ es una raíz racional de } P(x)$$

TEOREMA DEL FACTOR

Sea $P(x)$ un polinomio tal que grado de $P(x) \geq 1$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a) \text{ es un factor de } P(x)$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\text{Si: } x = 2 \Rightarrow P(2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2) \text{ es un factor de } P(x)$$

Luego el polinomio se puede expresar de la forma:

$$P(x) = (x - 2)Q(x)$$

Procedimiento para factorizar

Sea $P(x)$ el polinomio a factorizar primero buscamos una raíz racional (sea a dicha raíz).

Luego $P(a) = 0$ y por el teorema del factor $(x - a)$ es un factor de $P(x)$ entonces el polinomio se puede expresar de la forma: $P(x) \equiv (x - a)q(x)$

Donde $q(x)$ es el cociente de la siguiente división:

$$\frac{P(x)}{x - a} \text{ en donde para hallarla se aplica Ruffini.}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Factorizar $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

Resolución:

Buscamos las posibles raíces racionales.

$$PRR = \pm \left\{ \frac{1; 3}{1} \right\} = \pm 1, \pm 3$$

De aquí 3 es una raíz racional porque $P(3) = 0$ y por teorema $(x - 3)$ es un factor de $P(x)$, luego: $P(x) = (x - 3)Q(x)$. Hallando $Q(x)$ por

Ruffini, en la siguiente división: $\frac{P(x)}{x - 3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

coef. de $q(x)$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

$$\therefore P(x) = (x - 3)(x^2 + x + 1)$$

Luego el polinomio tiene 2 factores primos.

2. Descomponer en factores:

$$x^3y + x^2y^2 - x^2yz + yz^3 - xyz^2 + xz^3 - y^2z^2 - x^3z$$

Resolución:

$$\begin{aligned} E &= x^3y - x^3z + x^2y^2 - x^2yz - y^2z^2 + yz^3 - xyz^2 + xz^3 \\ E &= x^3(y - z) + x^2y(y - z) - yz^2(y - z) - xz^2(y - z) \end{aligned}$$

$$E = (y - z)[x^3 + x^2y - yz^2 - xz^2]$$

$$E = (y - z)[x^2(x + y) - z^2(x + y)]$$

$$E = (y - z)(x + y)(x^2 - z^2)$$

$$E = (y - z)(x + y)(x + z)(x - z)$$

3. Buscar el equivalente de la expresión:

$$b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad + 2bc$$

Resolución:

$$(b^2 + 2bc + c^2) - (a^2 - 2ad + d^2)$$

$$(b + c)^2 - (a - d)^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$\therefore (b + c + a - d)(b + c - a + d)$$

4. Hallar uno de los factores de: $x^6 - x^2 - 8x - 16$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$E = x^6 - (x^2 + 8x + 16)$$

Planteando la diferencia de cuadrados:

$$E = (x^3)^2 - (x + 4)^2$$

$$\therefore E = (x^3 + x + 4)(x^3 - x - 4)$$

5. Descomponer el binomio $x^4 + 4y^4$ en el producto de dos binomios reales.

Resolución:

Sumando y restando $4x^2y^2$, se tiene:

$$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4) - 4x^2y^2$$

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$$

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$$

6. Uno de los factores de $x^4 + 2x^2 + 9$ es:

Resolución:

Se genera una diferencia de cuadrados quitando $4x^2$ y poniendo $4x^2$. Así:

$$E = x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 9 - 4x^2$$

$$E = (x^4 + 6x^2 + 9) - 4x^2$$

$$E = (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$$

$$E = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$$

7. Factorizar el siguiente polinomio:

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b - 35$$

Resolución:

Agrupando convenientemente, se logra:

$$(a+b)^2 - 2(a+b) - 35$$

$$(a+b) \begin{array}{l} \nearrow -7 \\ \searrow +5 \end{array}$$

$$(a+b) \begin{array}{l} \nearrow -7 \\ \searrow +5 \end{array}$$

$$\therefore (a+b-7)(a+b+5)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Factorizar: $3a^3b - 4a^2b + 3ac - 4c$, dar uno de sus factores.
 - $a^2b + c^3$
 - $ab + c$
 - $3a - 4$
 - $2a - 3$
 - $3a + 4$
- Factorizar: $2a^3 + b^3 - a^2b - 2ab^2$ e indicar un factor.
 - $a + 2$
 - $2 + b$
 - $2b - a$
 - $a - b$
 - $b - 2$
- Cuántos factores primos tiene: $a^7b^5 - a^3b^9$
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
- Factorizar: $(a^3 + b^3 + c^3)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ e indicar el número de factores primos
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Indicar la suma de términos de los factores: $6a^2b^2 - 11ab + 3$
 - $5ab - 4$
 - $5ab - 1$
 - $2ab - 3$
 - $8ab$
 - $ab - 1$
- Factorizar: $(x+y)^4 - 5xy(x+y)^2 + 6x^2y^2$, indicar uno de sus factores.
 - $x^2 - y^2$
 - $2x^2 - 2y^2$
 - $x^2 + y^2$
 - $x^2 + y^2 + xy$
 - $x^2 + y^2 - xy$
- Factorizar: $F(x) = (x^2 + x + 1)^2 - 16x(x+1) + 23$, señalar que factor no pertenece a $F(x)$.
 - $x - 3$
 - $x - 1$
 - $x + 1$
 - $x + 2$
 - $x + 4$
- Factorizar: $(x^2 + 5)^2 + 13x(x^2 + 5) + 42x^2$ indique la suma de coeficientes de un factor primo.
 - 5
 - 6
 - 2
 - 4
 - hay 2 respuestas.
- Factorizar: $P(x, y) = (x + y + 3)^2 + 7x + 7y + 3$ e indique qué factor es primo.
 - $x + y + 9$
 - $x + y - 2$
 - $x + y + 2$
 - $x + y + 1$
 - $x + y + 10$
- Factorizar: $H(x, y) = 54x^8 + 21x^4y^2 - 20y^4$ e indique un factor primo.
 - $6x^4 - 5x^2$
 - $9x^4 - 4y^2$
 - $9x^4 + 5y^2$
 - $6x^4 + 4y^2$
 - $3x^2 + 2y$
- Factorizar: $F(x, y) = (x^2 - y^2)^2 - (y^2 - 1)^2$, indicar un factor primo.
 - $x + y$
 - $x - y$
 - $x + 1$
 - $x^2 + y$
 - $y - 1$
- Factorizar: $R(x, y) = y^2 - x^2 + 6x - 9$, indicar el factor primo de mayor suma de coeficientes.
 - $y + x - 3$
 - $y - x + 3$
 - $x + y + 2$
 - $x + 2y - 1$
 - $y + 2 + 3x$
- Factorizar: $81a^4 + 9a^2 + 1$, dar el producto de términos de uno de sus factores.
 - $9a^2 + 1$
 - $-27a^3$
 - $27a$
 - a^3
 - 27
- Hallar la diferencia de los factores primos de: $P(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$
 - x
 - 2
 - 1
 - 4
 - x^2
- Hallar el factor primo que más veces se repite: $P(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$
 - $x + 1$
 - $x + 2$
 - $x + 3$
 - $x - 3$
 - $x - 2$
- Factorizar: $P(x) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60$ e indique la suma de los términos independientes de sus factores primos.
 - 10
 - 14
 - 19
 - 12
 - 12
- Factorizar: $(a-b)^2(c-d)^2 + 2ab(c-d)^2 + 2cd(a^2+b^2)$ e indicar la suma de sus factores.
 - $a^2 + b^2$
 - $c^2 + d^2$
 - $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$
 - $a^2 - b + c$
 - $c^2 + b$

18. Indicar la suma de los factores primos obtenidos al factorizar: $P(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3$
- a) $6x$ b) $6x - 3$ c) $8x + 1$
d) $9x - 1$ e) $6x - 1$
19. Factorizar: $F(x) = 24x^3 + 17x^2 + 11x + 3$ e indique la suma de coeficientes de sus factores primos.
- a) 3 b) 15 c) 7
d) 27 e) 11
20. Señalar el valor de m para que:
 $P(x; y) = 2x^2 + mx + 3y^2 - 5y - 2$ pueda expresarse como la multiplicación de 2 polinomios.
- a) 0 b) 7 c) 1
d) 5 e) -3
21. Factorizar: $(a + b + c + d)^2 - a^2 - b^2 - ac - ad$ indicar luego uno de los factores primos.
- a) $a + 2c + d$ b) $d + 2b + c$ c) $a + b + c$
d) $a + b + d$ e) $b + c + d$
22. Factorizar el polinomio:
 $x^2 - y^2 + 2z^2 - z^2 - 8x + 16$, de cómo respuesta la suma algebraica de los términos independientes de los factores primos.
- a) -8 b) 8 c) 4
d) -4 e) 0
23. Al escribir el polinomio:
 $x^7 - 4x^6 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$ bajo la forma $(x - 1)^a(x + 1)^b$ hallar el valor de $a - b$.
- a) 1 b) 2 c) -1 d) -2 e) 3
24. Indique uno de los factores primos en:
 $b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc - 1) + a^3(c - b^2)$
- a) $a^2 - b$ b) $c^2 - b$ c) $c^2 - c$
d) $a^2 - c$ e) $a^2 + b$
25. Indique la suma de factores primos:
 $8(a + b + c)^3 - (a + b)^3 - (a + c)^3 - [b^3 + 3bc(b + c) + c^3]$
- a) $4a - 4b - 4c$ b) $4a + 4b + 4c$
c) $4a + 3b + c$ d) $4a + 3b + c$
e) $4a + 3b + 3c$
26. Indique el número de factores primos:
 $(18c + 7b + 6a)(a + 3c + 3b) + 3b^2$
- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 2
27. Indique la suma de factores primos en:
 $a^4 + 5bc^2 - a^2b - a^2c^2 - 2b^2 - 2c^4$
- a) $2a^2 - b - c^2$ b) $2a^2 + b + c$
c) $2a^2 + b - c^2$ d) $2b^2 - a - c$
e) $2c^2 - b + c$
28. Indique el número de factores primos en:
 $(x^2 + 5 + 7x)^2 + 3x^2 + 5 + 21x$
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
29. Indique uno de los factores primos en:
 $a^3 + b^3 - 6ab + 8$
- a) $a + b + 3$ b) $a + b + 2$ c) $a + b + 6$
d) $a + b + 5$ e) $a + b + 1$
30. Indique la suma de factores primos en:
 $(a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$
- a) $4a$ b) $2a$ c) a
d) 0 e) $5a$

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. c | 7. c | 13. b | 19. e | 25. b |
| 2. d | 8. e | 14. d | 20. b | 26. e |
| 3. d | 9. d | 15. a | 21. b | 27. a |
| 4. c | 10. e | 16. e | 22. a | 28. c |
| 5. a | 11. c | 17. c | 23. a | 29. c |
| 6. c | 12. b | 18. b | 24. a | 30. a |

FRACCIONES ALGEBRAICAS

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de mayor grado posible que está contenida como factor, un número entero de veces en dichas expresiones. Para determinar el máximo común divisor se factorizan las expresiones y se forma el producto de los factores comunes con su menor exponente.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

De dos o más expresiones algebraicas, es la expresión de menor grado posible que contenga un número entero de veces como factor a dichas expresiones. Para determinar el mínimo común múltiplo se factorizan las expresiones y se forma el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

- Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

$$A = x^5 - ax^4 - a^4x + a^5$$

$$E = x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x$$

Resolución:

$$\text{En A: } A = x^4(x - a) - a^4(x - a)$$

Extrayendo factor común y desarrollando $x^4 - a^4$:

$$A = (x - a)(x^2 + a^2)(x + a)(x - a); \text{ finalmente:}$$

$$A = (x - a)^2(x^2 + a^2)(x + a)$$

En B: extrayendo factor común:

$$B = x(x^3 - ax^2 - a^2x + a^3)$$

$$B = x[x^2(x - a) - a^2(x - a)]$$

$$B = x(x - a)(x + a)(x - a); \text{ finalmente:}$$

$$B = x(x - a)^2(x + a)$$

$$\text{MCD(A; B): } (x - a)^2(x + a)$$

$$\text{MCM(A; B): } x(x - a)^2(x + a)(x^2 + a^2)$$

- Hallar el MCD y el MCM de:

$$A = x^2(x^2 + 2y^2) + (y^2 + z^2)(y + z)(y - z)$$

$$B = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2z^2) + z^4$$

$$C = x^4 + 2x^2z^2 + z^4 - y^4$$

Resolución:

Factorizando separadamente cada expresión:

$$A = x^4 + 2x^2y^2 + (y^2 + z^2)(y^2 - z^2)$$

$$A = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - z^4 = (x^2 + y^2)^2 - (z^2)^2$$

$$A = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$B = (x^2 + y^2)^2 + 2z^2(x^2 + y^2) + z^4$$

$$B = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

$$C = (x^4 + 2x^2z^2 + z^4) - y^4 = (x^2 + z^2)^2 - (y^2)^2$$

$$C = (x^2 + z^2 + y^2)(x^2 + z^2 - y^2)^*$$

$$\text{MCD(A; B; C)} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{MCM(A; B; C)} = (x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + z^2 - y^2)$$

- Hallar el MCD y el MCM de:

$$A = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Resolución:

Factorizando cada expresión:

$A = (x^3 + 2x^2) + (3x^2 + 8x + 4)$ factorizando por aspa simple el segundo paréntesis:

$$\begin{array}{r} 3x \quad \times \quad +2 \\ x \quad \times \quad +2 \end{array}$$

$$A = x^2(x + 2) + (3x + 2)(x + 2)$$

$$A = (x + 2)(x^2 + 3x + 2)$$

Factorizando por aspa simple el segundo paréntesis:

$$\begin{array}{r} x \quad \times \quad +2 \\ x \quad \times \quad +1 \end{array}$$

$$A = (x + 2)(x + 1)(x + 2) = (x + 1)(x + 2)^2$$

$$B = x^3 + 3x^2 - 4 = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$$

Factorizando en los dos primeros y en los dos últimos términos:

$$B = x^2(x - 1) + 4(x^2 - 1)$$

$$B = x^2(x - 1) + 4(x + 1)(x - 1)$$

$$B = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

$$C = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x^3 + 8) +$$

$$(6x^2 + 12x) = (x^3 + 2^3) + (6x^2 + 12x)$$

$$C = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 6x(x + 2)$$

$$C = (x + 2)(x^2 - 2x + 4 + 6x)$$

$$C = (x + 2)(x^2 + 4x + 4) = (x + 2)(x + 2)^2$$

$$C = (x + 2)^3$$

$$\text{MCD(A; B; C)} = (x + 2)$$

$$\text{MCM(A; B; C)} = (x + 2)^3(x + 1)(x - 1)$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Es fracción algebraica toda aquella expresión que tiene por lo menos una letra en el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{1}{x}, \frac{2x^2 + 3y^4}{x - z}; 4x^{-2}y^4z^5$$

Signos de una fracción. En una fracción se hallan tres signos:

1. Signo del numerador
2. Signo del denominador
3. Signo de la fracción

CAMBIOS DE SIGNOS EN UNA FRACCIÓN

1. **Cuando no hay factores indicados.** En toda fracción se puede cambiar dos de sus tres signos y la fracción no se altera. Así:

$$F = + \frac{+a}{+b} = - \frac{-a}{+b} = - \frac{+a}{-b} = + \frac{-a}{-b}$$

Ejemplo:

$$\text{Simplificar: } E = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - a^2}$$

Resolución:

Cambiando de signo a la fracción y al numerador:

$$E = - \frac{(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)} = -1$$

2. **Cuando la fracción tiene factores indicados.** En toda fracción si se cambia de signo a un número par de factores, la fracción no se altera; si se cambia de signo un número impar de factores, la fracción cambia de signo. Así:

Ejemplo:

$$\text{Simplificar: } E = \frac{(a - b)(a - c)}{(b - a)(c - a)}$$

Resolución:

Cambiando de signo a los dos factores del denominador se obtiene:

$$E = \frac{(b - a)(a - c)}{(b - a)(a - c)} = 1$$

Ejemplo:

$$\text{Simplificar: } E = \frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(a - b)(c - a)}$$

Resolución:

Cambiando de signo al factor $(c - a)$ en la segunda fracción, se obtiene:

$$E = \frac{1}{(a - b)(a - c)} - \frac{1}{(a - b)(a - c)} = 0$$

Simplificación de fracciones. Para simplificar una fracción se factoriza el numerador y el denominador y se eliminan los factores comunes que aceptan.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Simplificar:

$$\frac{x^3 + (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b}{x^3 + (a + 2b)x^2 + (b^2 + 2ab)x + ab^2}$$

Resolución:

Efectuando operaciones indicadas:

$$\frac{x^3 + 2ax^2 + bx^2 + a^2x + 2abx + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}$$

Ordenando y factorizando:

$$\frac{x(x^2 + 2ax + a^2) + b(x^2 + 2ax + a^2)}{x(x^2 + 2bx + b^2) + a(x^2 + 2bx + b^2)}$$

Cada paréntesis es un binomio al cuadrado:

$$\frac{(x + a)^2(x + b)}{(x + b)^2(x + a)} \Rightarrow \frac{x + a}{x + b}$$

2. Simplificar: $E = \frac{ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)}{ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)}$

Resolución:

Efectuando operaciones indicadas:

$$E = \frac{abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy}{abx^2 - aby^2 + a^2xy - b^2xy}$$

$$E = \frac{ax(bx + ay) + by(ay + bx)}{ax(bx + ay) - by(ay + bx)}$$

$$E = \frac{(bx + ay)(ax + by)}{(bx + ay)(ax - by)} \Rightarrow E = \frac{ax + by}{ax - by}$$

3. Simplificar: $E = \frac{(x + 1)(x^2 - 9)(x - 5) + 27}{(x + 2)(x^2 - 16)(x - 6) + 48}$

Resolución:

Descomponiendo la diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{(x+1)(x+3)(x-3)(x-5) + 27}{(x+2)(x+4)(x-4)(x-6) + 48}$$

$$E = \frac{(x+1)(x-3)(x+3)(x-5) + 27}{(x+2)(x-4)(x+4)(x-6) + 48}$$

Efectuando los productos de dos en dos:

$$E = \frac{(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 15) + 27}{(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 24) + 48}$$

Haciendo $x^2 - 2x = y$:

$$E = \frac{(y-3)(y-15) + 27}{(y-8)(y-24) + 48} = \frac{y^2 - 18y + 45 + 27}{y^2 - 32y + 192 + 48}$$

$$E = \frac{y^2 - 18y + 72}{y^2 - 32y + 240} = \frac{(y-12)(y-6)}{(y-20)(y-12)} = \frac{y-6}{y-20}$$

Reponiendo valores de y : $E = \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x - 20}$

4. Reducir a su mínima expresión:

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{ab - b^2}{ab - a^2}$$

Resolución:

Representando convenientemente:

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} - \frac{b(a-b)}{-a(a-b)}$$

$$E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b}{a} \Rightarrow E = \frac{a^2 - b^2}{ab} + \frac{b}{a}$$

$$E = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \Rightarrow E = \frac{a}{b}$$

5. Si $x \neq \pm 1$, hallar el producto:

$$P = \left[\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2} \right] \left[\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2} \right]$$

Resolución:

Trabajando en el interior de cada corchete:

$$P = \left[\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2} \right] \left[\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2} \right]$$

$$P = \left[\frac{(x^3+1)^2}{(x^3+1)^2} \right] \left[\frac{(x^3-1)^2}{(x^3-1)^2} \right]$$

$$P = [1]^2 \times [1]^2 \Rightarrow P = 1$$

6. Hallar el producto:

$$E = \left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right)$$

Resolución:

Trabajando con cada factor:

$$\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1+x)(1-x)} = \frac{4x}{1-x^2}$$

$$\frac{3+x^2-4x^2}{4x} = \frac{3(1-x^2)}{4x}$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{4x}{1-x^2} \right) \left(\frac{3(1-x^2)}{4x} \right) = 3$$

7. Reducir a su mínima expresión:

$$E = \frac{a + (a^2 - 1)^{1/2}}{a - (a^2 - 1)^{1/2}} - \frac{a - (a^2 - 1)^{1/2}}{a + (a^2 - 1)^{1/2}}$$

Resolución:

Haciendo: $(a^2 - 1)^{1/2} = x$

$$E = \frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{(a+x)^2 - (a-x)^2}{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{4ax}{a^2 - x^2}$$

$$\text{Reponiendo: } E = \frac{4a(a^2 - 1)^{1/2}}{a^2 - (a^2 - 1)} = \frac{4a(a^2 - 1)^{1/2}}{a^2 - a^2 + 1}$$

$$\therefore E = 4a(a^2 - 1)^{1/2}$$

8. Efectuar la siguiente simplificación:

$$E = \frac{2 - \frac{8xy}{4x^2 + 2xy + y^2}}{\left(\frac{8x^3 + y^3}{8x^3 - y^3} \right) \left(1 - \frac{2y}{2x + y} \right)}$$

Resolución:

Trabajando con cada uno de los miembros de la fracción:

$$N = \frac{8x^2 + 4xy + 2y^2 - 8xy}{4x^2 + 2xy + y^2} = \frac{2(4x^2 - 2xy + y^2)}{(4x^2 + 2xy + y^2)}$$

$$D = \left[\frac{(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2)}{(2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)} \right] \left[\frac{2x-y}{2x+y} \right]$$

$$\Rightarrow E = N/D = 2$$

9. Reducir:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{a}{1+a + \frac{2a^2}{1-a}}} \times \frac{1}{\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\right) \div \left[\left(a + \frac{1}{a}\right) \times (1+a)\right]}$$

Resolución:

Efectuando operaciones, de abajo hacia arriba:

$$E = \frac{1}{1 + \frac{a(1-a)}{(1+a^2)}} \times \frac{(1+a)}{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \div \left(a + \frac{1}{a}\right)}$$

$$E = \frac{(1+a^2)}{(1+a)} \times \frac{(1+a)}{\left(a + \frac{1}{a}\right)}$$

$$E = \frac{(1+a^2)}{(1+a)} \times \frac{(1+a) \cdot a}{(a^2+1)} = a$$

10. Simplificar la expresión:

$$E = \frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2}$$

Resolución:

Trabajando con el denominador de la fracción y representando la diferencia de cuadrados:

$$(1+ax+a+x)(1+ax-a-x)$$

Agrupando y factorizando:

$$[(1+a)+x(1+a)] \cdot [(1-a)-x(1-a)]$$

$$(1+a)(1+x)(1-a)(1-x)$$

$$\Rightarrow (1-a^2)(1-x^2)$$

$$\text{ Toda la fracción: } E = \frac{1-a^2}{(1-a^2)(1-x^2)} = \frac{1}{1-x^2}$$

11. Hallar la expresión equivalente a:

$$E = \frac{\frac{m^3}{27} - \frac{m^2n}{3} + mn^2 - n^3}{\left(\frac{m}{3} - n\right)^2}$$

Resolución:

$$\text{Sabemos que: } \left(\frac{m}{3} - n\right)^3 = \frac{m^3}{27} - \frac{m^2n}{3} + mn^2 - n^3$$

$$\text{Reemplazando: } E = \frac{\left(\frac{m}{3} - n\right)^3}{\left(\frac{m}{3} - n\right)^2} = \left(\frac{m}{3} - n\right)$$

$$12. \text{ Simplificar: } E = \frac{\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left(b^2 - \frac{1}{a^2}\right)^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

Resolución:

Factorizando las diferencias de cuadrados en el primer paréntesis del numerador y denominador:

$$E = \frac{\left[\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{b}\right)\right]^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left[\left(b + \frac{1}{a}\right)\left(b - \frac{1}{a}\right)\right]^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

$$E = \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-2n}}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^{-n} \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-n} \left(b + \frac{1}{a}\right)^{2n}}$$

$$E = \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^n \left(a - \frac{1}{b}\right)^{-n}}{\left(b + \frac{1}{a}\right)^n \left(b - \frac{1}{a}\right)^{-n}}$$

$$E = \left[\frac{a + \frac{1}{b}}{b + \frac{1}{a}}\right]^n \left[\frac{a - \frac{1}{b}}{b - \frac{1}{a}}\right]^{-n} = \left[\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right]^n \left[\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right]^{-n}$$

$$E = \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \quad \therefore E = 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Hallar el MCD de:

$$P(x) = (x+1)^2(x-3)^4(x+5)^6$$

$$Q(x) = (x+1)^2(x+1)^3(x-3)^2$$

$$R(x) = (x+1)^4(x-3)^3(x+6)^7$$

$$a) (x+1)^2(x-3)^2$$

$$b) (x+1)^4$$

$$c) (x+6)^7$$

$$d) (x+1)^4(x-3)^4$$

$$e) (x+1)(x-1)(x-3)$$

2. Hallar el MCM de:
- $P(x) = (x+1)^2(x-3)^4$

$$Q(x) = (x-3)^5(x+4)^2$$

$$a) (x+1)^2(x-3)^5(x+4)$$

$$b) x-3)^5$$

$$c) (x+1)^2(x-3)^5(x+4)^2$$

- d) $(x-3)^4$
e) $(x+1)^2(x-3)^4(x+4)^2$
3. Halla el MCD de las siguientes expresiones:
 $a^{-1}x^{n-1}$; $b^{-1}x^{n-2}$; $c^{-1}x^{n-3}$
a) $abcx^n$ b) x^n/abc c) x^{n-3}
d) x^{n-2} e) x^{n-1}
4. Hallar el MCD de las expresiones:
 ax^{n-3} ; bx^{n-4} ; cx^{n-5}
a) $abcx^{n-3}$ b) $\frac{1}{abc}x^{n-5}$ c) $abcx^{n-5}$
d) $abcx^{n-4}$ e) x^{n-5}
5. Dados los monomios:
 $A(x, y, z) = x^a \cdot 3y^b \cdot z^c$
 $B(x, y, z) = x^a \cdot 1y^b + 3z^c$
 $C(x, y, z) = x^a \cdot 2y^b + 2z^c$
indique el MCM(A; B; C).
a) $x^{10}y^5$ b) $x^8y^9z^6$ c) $x^8y^{10}z^6$
d) $x^7y^6z^5$ e) $x^8y^6z^9$
6. Siendo: $A(x) = x^2 + 3x - 10$
 $B(x) = x^4 - 25x^2$
 $C(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$
halle el MCD(A; B; C).
a) $x - 2$ b) $x - 1$ c) $x + 5$
d) x e) $x(x-2)$
7. Encontrar el MCD de los polinomios:
 $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
 $Q(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
 $R(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
a) $x^2 - x - 1$ b) $x^2 + x - 1$
c) $x^2 - x - 2$ d) $x^2 + x + 2$
e) $x - 1$
8. ¿Cuál de las expresiones que se dan es el MCD de $(3x^3 - 8x + 8)$ y $(x^3 - 6x - 4)$?
a) $x + 5$ b) $x + 4$ c) $x - 5$
d) $x + 2$ e) $x + 3$
9. Si el MCD de los polinomios:
 $P(x) = x^4 - 9x^2 + mx + n$
 $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + px + q$
es $x^2 - 5x - 6$. Halle el grado del MCM de dichos polinomios.
a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 7
10. Efectuar: $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} + \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 3x - 4}$
a) $2/(x+1)$ b) $3/(x-2)$
c) $(x-2)/(x+1)$ d) 3
e) 2
11. Efectuar: $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} - \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 8}$
a) $x + 2$ b) $x - 2$ c) 1
d) $x - 4$ e) $x + 4$
12. Reducir: $\frac{x^2}{xy + y^2} + \frac{y^2}{xy + x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$
a) 0 b) x/y c) y/x
d) 2 e) -1
13. Efectuar: $M = \frac{x^3}{x+1} + \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$
a) $x^2 + 2$ b) $x - 2$ c) $x + 1$
d) $x^2 - 2$ e) $x^2 + 1$
14. Efectuar: $P = \frac{(x+2y)^2 - y^2}{(2x+y)^2 - x^2} + \frac{y^2 - 25x^2}{x^2 - (4x+y)^2}$
a) $\frac{2y-4x}{3y+x}$ b) $\frac{6x+4y}{3x+y}$ c) $\frac{2x}{3x+y}$
d) 1 e) 2
15. Efectuar:
 $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$
a) abc b) $a + b + c$
c) $ab + bc + ac$ d) 1
e) 0
16. Efectuar: $\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x-1}{(x+1)^2}$
a) $x/(x-1)$ b) $1/(x+1)^2$
c) $-2/(x+1)^2$ d) $3/(x+1)^2$
e) 1

17. Efectuar:

$$E = \frac{11a - 7b}{7b - 11a} + \frac{2x - 3y}{-3y + 2x} + \frac{x + y}{x^2 - y^3} + \frac{x + y}{y^3 - x^2}$$

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

$$18. \text{ Efectuar: } E = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} + \frac{x^2 + 6x - 27}{x^2 - 9} + \frac{25 - x^2}{x^2 - 9x + 20} + \frac{2x + 1}{x - 4}$$

- a) 0 b) 3 c) 2
-
- d)
- $\frac{2x - 1}{x^2 - 4}$
- e) 4

19. Hallar el equivalente de:

$$S = \frac{1}{x(x + y)} + \frac{1}{(x + y)(x + 2y)} + \frac{1}{(x + 2y)(x + 3y)} + \frac{1}{(x + 3y)(x + 4y)} + \dots n \text{ fracciones}$$

a) $\frac{1}{x(x + y)}$

b) $\frac{n}{x(x + y)}$

c) $\frac{n}{x(x + ny)}$

d) $\frac{1}{x(x + ny)}$

e) n

$$20. \text{ Efectuar: } N = \frac{(x^2 + 2x - 1)^2 - (x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 2x - 1)^2}$$

a) 1

b) -1

c) $\frac{x + 1}{x - 1}$

d) $\frac{x - 1}{x + 1}$

e) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

CLAVES

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 1. a | 5. c | 9. d | 13. a | 17. e |
| 2. c | 6. c | 10. e | 14. e | 18. d |
| 3. c | 7. c | 11. c | 15. e | 19. c |
| 4. e | 8. d | 12. e | 16. c | 20. a |

BINOMIO DE NEWTON

SÍMBOLO FACTORIAL

Dado un número entero positivo n , se define su factorial al producto de los factores consecutivos desde la unidad hasta dicho número propuesto.

Notación:

Existen dos notaciones: $n!$ y $\lfloor n$

Ejemplos:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

Notas:

- $a! = 1 \Rightarrow a = 0 \vee a = 1$
- $a! = b! \Rightarrow a = b$
- $a! = a(a-1)!$

En general:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n; n \in \mathbb{N}$$

COEFICIENTE BINÓMICO

Es un operador matemático, que se utiliza para representar los coeficientes que se obtienen al desarrollar la potencia de un binomio.

Notación:

Un coeficiente binómico se representa $\binom{m}{n}$ que se lee "coeficiente binómico m sobre n ".

Elementos:

1. **Índice superior o base.** Es el número que se ha representado con m y que tiene valor arbitrario.
2. **Índice inferior u orden.** Es el número entero y positivo, designado con n , que indica el total de factores que hay en el desarrollo.

Desarrollo general del coeficiente binómico

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 1}$$

Ejemplo:

$$\binom{12}{5} = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)}{(5)(4)(3)(2)(1)} = 792$$

Propiedades del coeficiente binómico

1. Si el índice inferior es cero, el coeficiente vale uno.

$$\binom{m}{0} = 1$$

2. Si el índice inferior es la unidad, el coeficiente es igual al índice superior: $\binom{m}{1} = m$

3. Suma de coeficientes binómicos:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

4. Las propiedades siguientes se cumplen cuando los elementos son números naturales, debiendo ser la base mayor o igual que el orden. Estos operadores también se denominan números combinatorios y se les representa por:

$$C_n^m = \binom{m}{n}$$

$$C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$C_n^m = C_{m-n}^m \vee \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$C_n^m = \binom{m}{m} = 1$$

$$C_n^m = \binom{m}{n} = 0; \text{ si } m < n$$

BINOMIO DE NEWTON

Se da este nombre a la potencia indicada de un binomio.

Ejemplos:

$$(a+b)^5; (a-b)^{-2}; (1+x)^{-1/3}$$

DESARROLLO DEL BINOMIO $(a+b)^n$

Regla práctica: un coeficiente cualquiera del desarrollo, se obtiene multiplicando el coeficiente anterior al que deseamos calcular por el exponente de a , y luego dividiendo entre el exponente de b aumentado en la unidad.

Ejemplos:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + \dots$$

Observación:

Si el exponente es entero negativo o fraccionario, el desarrollo admite infinidad de términos.

TRIÁNGULO DE PASCAL

Nos sirve para obtener los coeficientes del desarrollo de un binomio para exponente natural.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & \\
 & 1 & 2 & 1 & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (a+b)^0 \\
 (a+b)^1 \\
 (a+b)^2 \\
 (a+b)^3 \\
 (a+b)^4 \\
 (a+b)^5
 \end{array}$$

Término general del desarrollo de $(a+b)^n$

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

donde: $(k+1)$ es la posición del término.

Propiedades del desarrollo de $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

1. El número de términos que resultan es $n+1$.
2. Los signos de los términos se definen del esquema:

$$(a+b)^n: +, +, +, +, \dots, +$$

$$(a-b)^n: +, -, +, -, \dots, \pm$$

$$(-a-b)^n: \begin{cases} \text{Si } n \text{ par: } +, +, +, +, \dots, + \\ \text{Si } n \text{ impar: } -, -, -, -, \dots, - \end{cases}$$

3. La suma de los coeficientes del desarrollo de $(\alpha a + \beta b)^n$ es: $S = (\alpha + \beta)^n$ (en el caso particular $\alpha = \beta = 1$ resulta $S = 2^n$)
4. La suma de los exponentes del desarrollo de

$$(a^\alpha + b^\beta)^n \text{ es: } S_{\text{exp.}} = \frac{(\alpha + \beta)n(n+1)}{2}$$

5. La posición del término central o medio del desarrollo se calculará con las relaciones:

$$\bullet \text{ Si } n \text{ par: } \frac{n+2}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ impar: } \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Proporcionar el valor de x de:

$$\frac{m^x}{3x} C_m^{m+x} \left[1 + \frac{1}{m} \right] \left[1 + \frac{2}{m} \right] \left[1 + \frac{3}{m} \right] \dots \left[1 + \frac{x}{m} \right] = 1680$$

Resolución:

Desarrollando el número combinatorio y efectuando cada suma indicada se consigue:

$$\frac{m^x x! m! (m+1)(m+2)(m+3) \dots (m+x)}{3x(m+x)! \cdot \underbrace{m \cdot m \cdot m \dots m}_{x \text{ veces}}} = 1680$$

Transformando cada expresión indicada tenemos:

$$\frac{m^x (x!)(m+x)!}{3x(m+x)! m^x} = \frac{x!}{3x} = \frac{x(x-1)!}{3x} = 1680$$

$$(x-1)! = 5040, \text{ es decir: } (x-1)! = 7! \text{ de donde: } x-1=7 \Rightarrow x=8$$

2. Encontrar el valor de x que verifica:

$$\left[\frac{C_{x-4}^{x-1} + 2C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1}}{2} \right]! = 120$$

Resolución:

Teniendo en cuenta que: $120 = 5!$ fácilmente deducimos que: $C_{x-4}^{x-1} + 2C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1} = 10$

con la finalidad de utilizar la propiedad de reducción para números combinatorios expresamos así: la igualdad dada:

$$C_{x-4}^{x-1} + C_{x-3}^{x-1} + C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1} = 10$$

$$\text{Luego: } C_{x-3}^{x-1} + C_{x-2}^{x-1} = C_{x-2}^{x-1} = 10$$

De acuerdo con la propiedad de complemento podemos establecer que:

$$C_3^{x+1} = 10 \Rightarrow \frac{(x+1)(x)(x-1)}{(1)(2)(3)} = 10 = (5)(2)$$

$$\text{Es decir: } (x+1)(x)(x-1) = (5)(4)(3)$$

$$\therefore x = 4$$

3. Encontrar el valor de n para que el cuarto término del desarrollo de $(x^2 - y)^n$ contenga a x^{10} .

Resolución:

Por condición del problema: $t_4 = x^{10} \dots (I)$

Halleemos t_4 del desarrollo de $(x^2 - y)^n$ según fórmula:

$$t_4 = C_3^n (x^2)^{n-3} (-y)^3 = -C_3^n x^{2n-6} y^3 \dots (II)$$

Con (I) y (II) tenemos: $2n - 6 = 10 \Rightarrow n = 8$

4. Encontrar el coeficiente del término que admite a x^{20} como parte literal en la expansión de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

Resolución:

La potencia dada es: $(x^3 + x^{-1})^{12}$; sea T_{k+1} quien contiene a x^{20} , luego por fórmula se tendrá: $T_{k+1} = C_k^{12} (x^3)^{12-k} (x^{-1})^k = C_k^{12} x^{36-4k}$

Observar que el coeficiente pedido es:

$$C_k^{12} \quad \dots (1)$$

Por condición: $36 - 4k = 20 \Rightarrow k = 4 \quad \dots (2)$

Finalmente sustituyendo (2) en (1) tenemos:

$$C_4^{12} = \frac{(12)(11)(10)(9)}{(1)(2)(3)(4)} = 495$$

5. Hallar el valor de n sabiendo que la diferencia entre los grados absolutos de los términos sexto y decimosexto del desarrollo de $(x^4 + y^n)^{2m}$ es 10.

Resolución:

Por condición: $GA(t_6) - GA(t_{16}) = 10 \quad \dots (1)$

Hallemos t_6 de: $(x^4 + y^n)^{2m}$, así:

$$t_6 = C_5^{2m} (x^4)^{2m-5} (y^n)^5 = C_5^{2m} x^{8m-20} y^{5n}$$

Observar que: $GA(t_6) = 8m + 5n - 20 \quad \dots (2)$

Hallemos: t_{16} de $(x^4 + y^n)$ así:

$$t_{16} = C_{15}^{2m} (x^4)^{2m-15} (y^n)^{15} = C_{15}^{2m} x^{8m-60} y^{15n}$$

Observar que: $GA(t_{16}) = 8m + 15n - 60 \quad \dots (3)$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) tenemos:

$$8m + 5n - 20 - (8m + 15n - 60) = 10 \\ -10n + 40 = 10 \Rightarrow n = 3$$

6. Encontrar el término que no contiene a x en la expansión de: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^9$

Resolución:

Sea t_{k+1} el término pedido, es decir:

$$t_{k+1} = C_k^9 \sqrt{x}^{9-k} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_k^9 x^{\frac{9-k}{2} - \frac{k}{4}} \dots (\alpha)$$

Como este término no contiene a x se deberá cumplir que:

$$\frac{9-k}{2} - \frac{k}{4} = 0 \Rightarrow \frac{18-3k}{4} = 0 \Rightarrow k = 6$$

Finalmente en (α) se consigue:

$$t_7 = C_6^9 = C_3^9 = \frac{(9)(8)(7)}{(1)(2)(3)} \therefore t_7 = 84$$

7. En la expansión de: $(\sqrt{x^3} + x^{-1/3})^n$, la suma de todos los coeficientes es igual a 128. Hallar el término que contiene a x^5 .

Resolución:

De acuerdo con la teoría la suma de todos los coeficientes del desarrollo de $(\sqrt{x^3} + x^{-1/3})^n$ se consigue haciendo: $x = 1$; veamos:

Suma de coeficientes $= (1 + 1)^n = 2^n$; Por condición: $2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7$

De donde se deduce que: $n = 7$. Sea t_{k+1} el término de $(\sqrt{x^3} + x^{-1/3})^7$ que contiene a x^5 , es decir:

$$t_{k+1} = C_k^7 (\sqrt{x^3})^{7-k} (x^{-1/3})^k = C_k^7 x^{\frac{21-3k}{2} - \frac{k}{3}}$$

$$\text{Por condición: } \frac{21-3k}{2} - \frac{k}{3} = 5$$

$$\Rightarrow 63 - 11k = 30 \Rightarrow k = 3$$

Luego el término pedido es: t_4

$$\Rightarrow t_4 = C_3^7 x^5 = \frac{(7)(6)(5)(4!)}{(1)(2)(3)(4!)} x^5 = 35x^5$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- Qué lugar ocupa el término de grado 48 en el desarrollo de: $(x^2 + y^3)^{18}$
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14
- Señale el valor del término independiente del desarrollo: $\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{x^4}\right)^9$
a) 56 b) 78 c) 84
d) 126 e) 154
- Hallar $a + k$ si se sabe que el cuarto término del desarrollo de $(x + 2)^a$ es $160x^k$.
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 12
- En el desarrollo de $(x^4 + x^{-3})^{2n-1}$ uno de los términos centrales es independiente de x . Halle el número de términos.

- a) 6 b) 8 c) 12
d) 11 e) 10
5. Hallar n : $\frac{C_{n-1}^{n+6}}{C_{n-1}^{n+4}} = 1$
a) 1 b) 2 c) 8 d) 4 e) 6
6. Hallar los valores de x que satisfacen la igualdad: $C_{x^2}^{35} = C_{2x}^{35}$
a) $\{0; 2\}$ b) $\{2; 5\}$ c) $\{0; 2; 5\}$
d) $\{1; 2; 5\}$ e) $\{2; 3; 4\}$
7. Para que valor de n se verifica la siguiente igualdad:
 $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n$
proporcionar la suma de los 2 valores hallados.
a) 8 b) 15 c) 12 d) 4 e) 6
8. Reducir: $E = C_3^x + 4C_3^{x+1} + C_3^{x+2}$
a) x b) x^2 c) $2x$ d) $3x$ e) x^3
9. Reducir: $C_9^{12} + C_{11}^{13} + C_{10}^{12} + C_{12}^{14}$
a) 211 b) 189 c) 462
d) 455 e) 321
10. Hallar x : $C_6^x = C_{2x-16}^x$
a) 10 b) 11 c) 12
d) 9 e) hay 2 respuestas
11. Hallar x : $C_{x-2}^x + \left(\frac{x}{x-2}\right)C_{x-3}^{x-1} = 12$
a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3
12. Hallar x en: $\left(\frac{x}{x-2}\right)C_{x-3}^{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)C_{x-2}^{x-1} = 15$
a) 4 b) 5 c) 2 d) 6 e) 7
13. Hallar el valor de n : $\frac{2^n(n+1)!}{(2n)!} = 3$
a) 2 b) 3 c) 4
d) 6 e) 8

14. Simplificar la expresión:

$$P = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{(1)(3)(5)\dots(2n-1)}$$

- a) $n!$ b) $(n-1)!$ c) $(n+1)!$
d) n e) $n+1$
15. Hallar el término independiente en el desarrollo de: $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$
a) 8 b) 495 c) 9
d) 132 e) 61
16. Hallar el coeficiente del 7.º término del desarrollo de: $(2x + y)^9$
a) 312 b) 215 c) 672
d) 521 e) 406
17. Hallar el término central de: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10}$
a) 252 b) -252 c) 252x
d) x e) 1
18. Calcular el tercer término del desarrollo de: $(x + y)^{-2}$
a) $5x^{-2}y$ b) $x^{-4}y$ c) $3x^{-4}y^2$
d) $2x^{-4}y^2$ e) $x^{-5}y^2$
19. A qué exponente debe elevarse el binomio $(x + 2y)$ de manera que el cociente de los coeficientes de los términos de lugares 11.º y 10.º resulte 40.
a) 109 b) 110 c) 209
d) 208 e) 112
20. En el desarrollo de $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{17}$, el término de lugar $(k+1)$ posee x^{k+1} . Hallar dicho lugar.
a) 5 b) 7 c) 9 d) 11 e) 13
21. Hallar el valor de n si el término de lugar 25 en el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ contiene a x^{12} .
a) 30 b) 40 c) 66
d) 70 e) 78

22. Hallar el séptimo término sabiendo que es independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$$

- a) 50 b) 80 c) 84
d) 95 e) 1
23. En el desarrollo de la quinta potencia de un binomio se verifica que el cuarto término es $-80a^4b^6x^4$ y el último $-32b^{10}$. Hallar dicho binomio.
- a) $(ax + 2b)$ b) $(ax^2 - 2b)$
c) $(a^2x + b^2)$ d) $(ax^4 - b)$
e) $(a^2x^2 - 2b^2)$

24. Determinar el valor de n para que los términos de los lugares 9 y 10 de $(x + 3)^n$ tengan igual coeficiente.

- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

25. Hallar el lugar que ocupa el TI de:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{154}$$

- a) 72 b) 98 c) 111
d) 112 e) 113

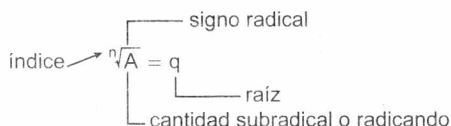
CLAVES	1. d	6. c	11. d	16. c	21. c
	2. c	7. e	12. b	17. b	22. c
	3. b	8. e	13. a	18. c	23. e
	4. b	9. e	14. a	19. e	24. c
	5. a	10. e	15. b	20. d	25. e

RADICACIÓN

Radicación es la operación que consiste en hallar una cantidad algebraica q , llamada raíz, que al ser elevada a un cierto índice reproduce una cantidad dada A , llamada radicando o cantidad subradical.

En general: $\sqrt[n]{A} = q \Rightarrow A = q^n$

Elementos de una raíz:



Signos de las raíces

- La raíz de índice par de una expresión algebraica positiva tiene dos valores iguales y de signos contrarios (+) y (-).
- La raíz de índice par de una expresión algebraica negativa carece de valor real y se llama raíz imaginaria.
- La raíz de índice impar de expresiones algebraicas tiene el mismo signo del radicando.

En resumen:

$$\sqrt[n]{+} = (\pm)$$

$$\sqrt[n]{-} = \text{Imaginaria}$$

$$\sqrt[n]{+} = (+)$$

$$\sqrt[n]{-} = (-)$$

RAÍZ DE UN MONOMIO

Para extraer la raíz de un monomio, se debe proceder así:

- Se extrae la raíz del signo de acuerdo con la ley de signos para las raíces.
- Se extrae la raíz del coeficiente.
- Se dividen los exponentes de las letras entre el índice de la raíz.

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{81x^{12}y^8z^{24}} = 3x^3y^2z^6$$

$$\sqrt[5]{-32x^{10}y^{20}z^{25}} = -2x^2y^4z^5$$

RADICALES DOBLES

Se denomina radical doble al que presenta la siguiente fórmula general: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Ejemplos:

$$\sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

$$\sqrt{11 - \sqrt{120}}$$

Transformación de radicales dobles a radicales simples o sencillos. Todo radical doble se puede descomponer en la suma o diferencia de dos radicales simples. Deducción de la fórmula.

En resumen la fórmula para descomponer una raíz doble en raíces simples es:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$

Es decir que, para transformar raíces dobles, en raíces simples, $A^2 - B$ (cuadrado perfecto).

Ejemplo:

Descomponer en radicales simples: $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

Resolución:

Previamente, introduciendo el 6 dentro del radical interior, y aplicando la fórmula:

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+C}{2}} + \sqrt{\frac{11-C}{2}} \dots (1)$$

Cálculo de C:

$$C = \sqrt{11^2 - 72} = \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = 7$$

Reemplazando en (1):

$$\sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+7}{2}} + \sqrt{\frac{11-7}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{11 + \sqrt{72}} = 3 + \sqrt{2}$$

Observación:

Este ejercicio y sus similares se pueden resolver dándole la forma de binomio al cuadrado bajo el radical y procediendo de la siguiente forma general:

$$\sqrt{\underbrace{a+b}_S \pm 2\sqrt{\underbrace{ab}_P}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Aplicando al ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{11 + \sqrt{72}} = \sqrt{11 + \sqrt{4 \times 18}} \\ &= \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{11+2\sqrt{18}} &= \sqrt{11+2\sqrt{9 \times 2}} = \sqrt{\underbrace{9+2}_{S} + 2\sqrt{\underbrace{9 \times 2}_{P}}} \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{2} \quad \therefore \sqrt{11+2\sqrt{18}} = 3 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ejemplos:

1. Calcular el valor de:

$$E = \sqrt{12 + \sqrt{140}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}} + \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$$

Resolución:

Transformando cada radical doble separadamente, haciendo que sean desarrollo de cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned}\sqrt{12 + \sqrt{140}} &= \sqrt{12 + \sqrt{4 \times 35}} \\ &= \sqrt{7 + 5 + 2\sqrt{7 \times 5}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{8 + \sqrt{28}} &= \sqrt{8 + \sqrt{4 \times 7}} = \sqrt{7 + 1 + 2\sqrt{7 \times 1}} \\ &= \sqrt{7} + \sqrt{1}\end{aligned}$$

$$\sqrt{11 - 2\sqrt{30}} = \sqrt{6 + 5 - 2\sqrt{6 \times 5}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6 + 1 - 2\sqrt{6 \times 1}} = \sqrt{6} - \sqrt{1}$$

Sustituyendo en la expresión propuesta:

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{5} - (\sqrt{7} + \sqrt{1}) + \sqrt{6} - \sqrt{5} - (\sqrt{6} - \sqrt{1})$$

$$E = \sqrt{7} + \sqrt{5} - \sqrt{7} - 1 + \sqrt{6} - \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{1}$$

$$E = 0$$

2. Hallar la raíz cuadrada de:

$$E^2 = 5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}$$

Resolución:

Al extraer la raíz cuadrada se tendrá:

$$E = \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{6x^2 - 7x - 3}}$$

Factorizando por el método del aspa al radical interior se obtiene:

$$6x^2 + 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$$

$$\text{Sustituyendo: } \sqrt{5x - 2 + 2\sqrt{(3x + 1)(2x - 3)}}$$

Dando la forma de $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$, donde:

$$a = 3x + 1; b = 2x - 3$$

$$\begin{aligned}\sqrt{(3x + 1) + (2x - 3) + 2\sqrt{(3x + 1)(2x - 3)}} &= \\ \sqrt{(3x + 1) + (2x - 3)} &= \\ \therefore E = \sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 3}\end{aligned}$$

3. Simplificar:

$$E = \sqrt{2 - 1}(\sqrt{56 + 40\sqrt{2}} - \sqrt{34 + 26\sqrt{2}} + \sqrt{23 + 37\sqrt{2}})$$

Resolución:

Ninguno de los radicales dobles que tiene la expresión puede transformarse directamente a radicales simples, ¿por qué?, entonces, se realiza el producto de radicales: Efectuando:

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(56 + 40\sqrt{2})} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(34 + 26\sqrt{2})} + \\ &\quad \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(23 + 37\sqrt{2})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= \sqrt{80 - 56 + 16\sqrt{2}} - \sqrt{52 - 34 + 8\sqrt{2}} + \\ &\quad \sqrt{74 - 23 - 14\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$E = \sqrt{24 + 16\sqrt{2}} - \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{51 - 14\sqrt{2}}$$

Transformando a radical simple, cada radical doble:

$$\begin{aligned}\sqrt{24 + 16\sqrt{2}} &= \sqrt{24 + 2\sqrt{128}} \\ &= \sqrt{16 + 8 + 2\sqrt{16 \times 8}} = \sqrt{16} + \sqrt{8}\end{aligned}$$

$$\sqrt{24 + 16\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} &= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} \\ &= \sqrt{16 + 2 + 2\sqrt{16 \times 2}} = \sqrt{16} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{18 + 8\sqrt{2}} = 4 + \sqrt{2} \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{51 - 14\sqrt{2}} &= \sqrt{51 - 2\sqrt{49 \times 2}} \\ &= \sqrt{49 + 2 - 2\sqrt{49 \times 2}} = \sqrt{49} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{51 - 14\sqrt{2}} = 7 - \sqrt{2} \quad \dots (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en la expresión:

$$\therefore E = 7$$

RACIONALIZACIÓN

Es la operación que consiste en transformar un denominador irracional en otro equivalente que sea racional.

Fracción irracional. Se llama así a una fracción en cuyo denominador está presente una raíz.

Factor racionalizante. El factor racionalizante de una expresión irracional, es también otra expresión irracional que multiplicada por la primera, la convierte en una expresión racional. Cuando se racionaliza una fracción, desaparece todo signo radical del denominador.

CASOS QUE SE PRESENTAN

Primer caso. Cuando el denominador irracional es un monomio. El factor racionalizante del denominador es un radical de igual índice, el radicando está elevado a un exponente igual a la diferencia entre el índice de la raíz y el exponente inicial del radicando.

Nota:

Para racionalizar se multiplica y divide la fracción por el factor racionalizante.

Ejemplos:

1. Racionalizar: $E = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}}$

Resolución:

multiplicando y dividiendo por: $FR = \sqrt[n]{a^{n-q}}$

$$E = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^{n-q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{\sqrt[n]{a^n}} \quad \therefore E = \frac{\sqrt[n]{a^{n-q}}}{a}$$

2. Racionalizar: $E = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3} \sqrt[3]{b^2} \sqrt[7]{c^4}}$

Resolución:

El factor racionalizante es:

$$FR = \sqrt[5]{a^{5-3}} \sqrt[3]{b^{3-2}} \sqrt[7]{c^{7-4}}$$

$$FR = \sqrt[5]{a^2} \sqrt[3]{b} \sqrt[7]{c^3}$$

Multiplicando y dividiendo por el factor racionalizante:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sqrt[5]{a^3} \sqrt[3]{b^2} \sqrt[7]{c^4}} \times \frac{\sqrt[5]{a^2} \sqrt[3]{b} \sqrt[7]{c^3}}{\sqrt[5]{a^2} \sqrt[3]{b} \sqrt[7]{c^3}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a^2} \times \sqrt[3]{b} \times \sqrt[7]{c^3}}{abc} \end{aligned}$$

Segundo caso. Cuando el denominador presenta radicales de índice dos, se racionaliza multiplicando y dividiendo por la conjugada del denominador.

Se denominan expresiones conjugadas a dos expresiones que están formadas, una por la suma y otra por la resta de términos iguales. Por ejemplo: $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$; $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ son expresiones conjugadas.

Se debe recordar que: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$.

Ejemplos:

1. Racionalizar: $E = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}$

Resolución:

Multiplicando y dividiendo por el:

$$FR = \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \left(\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} \right)$$

Los denominadores son conjugados entre sí, es un producto de suma por diferencia que da diferencia de cuadrados:

$$E = \frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{(\sqrt{a+b})^2 - (\sqrt{a-b})^2} = \frac{a+b + \sqrt{a^2 - b^2}}{2b}$$

2. Racionalizar: $E = \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

Resolución:

Multiplicando y dividiendo por el

$$FR = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}$$

$$E = \frac{12}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \times \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}$$

$$E = \frac{12(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{12(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5}$$

$$E = \frac{12(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \frac{6(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{6}}$$

$$E = \frac{6(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{30}$$

$$E = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}$$

Tercer caso. Cuando el denominador irracional es un binomio o trinomio cuyos radicales son de tercer orden de la forma:

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} \vee \sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

Se debe recordar que:

$$(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b$$

Uno de los factores es el factor racionalizante del otro.

Ejemplos:

1. Hacer racional el denominador de:

$$E = \frac{7}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$$

Resolución:

$$FR = \sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5 \times 2} + \sqrt[3]{2^2}$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el FR:

$$E = \frac{7(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{5 + 2} = \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}$$

2. Racionalizar el denominador:

$$E = \frac{48}{\sqrt[3]{21} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{35} - \sqrt[3]{5}}$$

Resolución:

Factorizando el denominador:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{21} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{35} - \sqrt[3]{5} &= \sqrt[3]{7}(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}) - \\ &(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}) = (\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{7} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } E = \frac{48}{(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{7} - 1)}$$

$$FR = (\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5 \times 3} + \sqrt[3]{3^2})(\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7} + 1)$$

Multiplicando numerador y denominador de la fracción por el factor racionalizante:

$$E = \frac{48(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1)}{(5 + 3)(7 - 1)}$$

$$E = (\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1)$$

5. Racionalizar: $A = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 2}$

Resolución:

Factorizando el denominador:

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} = -\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1)$$

$$\text{Luego: } A = \frac{3\sqrt[3]{2}}{-\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1)}$$

$$\text{Simplificando: } A = -\frac{3 \times 1}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$FR = \sqrt[3]{2} + 1$$

$$\text{Luego: } A = \frac{3(\sqrt[3]{2} + 1)}{2 + 1} = (\sqrt[3]{2} + 1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Efectuar: $T = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2\sqrt{2} - 3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

- a) 2 b) 3 c) 5
d) -1 e) $4\sqrt{2} - 1$

2. Efectuar: $I = 2\sqrt{18} - \frac{3}{2}\sqrt{2} + \sqrt[4]{4} - \frac{\sqrt{50}}{2} - 3\sqrt{2}$

- a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{2}$
d) $-3\sqrt{2}$ e) 0

3. Efectuar: $M = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$
siendo: $0 < x < 1$

- a) $2x$ b) 2 c) -2
d) $-2x$ e) 3

4. Efectuar: $P = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} - \sqrt{12 - 2\sqrt{27}} - \sqrt{32 + 2\sqrt{135}} + \sqrt{3}$

- a) 3 b) -1 c) -3
d) 4 e) N.A.

5. Efectuar: $T = \sqrt{13 + \sqrt{48}} - \sqrt{15 - \sqrt{200}} - \sqrt{17 + 4\sqrt{15}} - 1$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$
d) $-\sqrt{10}$ e) 3

6. Efectuar: $E = \sqrt{1 + 4\sqrt{1} + 4\sqrt{9} + 4\sqrt{5}} - 2$

- a) 0 b) 1 c) $\sqrt{5}$
d) $-\sqrt{5}$ e) 2

7. Efectuar:

$$O = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}} \times \sqrt{2 + \sqrt{5}}$$

- a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
d) -1 e) 10

8. Efectuar: $V = \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}$

9. Reducir: $A = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{21}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{9 + 2\sqrt{14}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$

- a) -1 b) 1 c) -2
d) 2 e) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

10. Efectuar: $L = \frac{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{13 - 4\sqrt{10}}}{\sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{5 - \sqrt{24}}}$

- a) -2 b) -1 c) 1
d) 2 e) $\sqrt{2} + 1$

11. Efectuar: $E = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{21}} - \sqrt{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}}$

- a) -1 b) -1/2 c) 1
d) 1/2 e) 2

12. Reducir: $N = \frac{\sqrt{13 - 2\sqrt{40}} + \sqrt{7 + \sqrt{40}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}}{\sqrt{33 + 8\sqrt{2}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{11 - \sqrt{72}}}$

- a) $\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2} - 1$
d) $3\sqrt{2} - 1$ e) 1

13. Efectuar: $T = \frac{\sqrt{28 - 6\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}}{\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} + \sqrt{19 + 8\sqrt{3}}}$

- a) 1 b) 3/2 c) 2
d) 5/2 e) 3

14. Efectuar: $I = \sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{27 - 6\sqrt{18}}$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

15. Reducir: $N = \frac{\sqrt{11 + \sqrt{72}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}}{\sqrt{14 - \sqrt{180}} + \sqrt{6 - \sqrt{20}}}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

16. Efectuar: $A = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{63}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}}{\sqrt{14 - 5\sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

- a) -1/2 b) -1 c) $\sqrt{2}$
d) 1 e) 1/2

17. Racionalizar y reducir:

$$A = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

- a) $\sqrt{2}/2$ b) 1 c) $\sqrt{2}$
d) 2 e) $2\sqrt{2}$

18. Efectuar: $B = \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} + \frac{2}{2\sqrt{3} + \sqrt{10}}$

- a) $\sqrt{3}$ b) 3 c) $2\sqrt{3}$
d) 9 e) $3\sqrt{3}$

19. Racionalizar: $C = \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$;

señalar el denominador.

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

20. Racionalizar: $E = \frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$;

señalar el denominador.

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

21. Racionalizar: $F = \frac{3}{5 - \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}}$;

señalar el denominador.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 6 e) 12

22. Racionalizar: $F = \frac{8}{7 + \sqrt{15} + \sqrt{21} + \sqrt{35}}$

Indicar el denominador.

- a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8

23. Calcular $N = \sqrt[3]{16 \sqrt[3]{16 \sqrt[3]{16 \dots}}}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

24. Efectuar: $x = \sqrt{8 \div \sqrt{8 \div \sqrt{8 \div \dots}}}$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 8 e) 6

25. Calcular: $E = \sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\sqrt[5]{\frac{64}{\dots}}}}}}$

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

26. Hallar x: $\sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{2 \dots}}} \sqrt{x}^4 = \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2 \dots}}}$

- a) 2^{-16} b) 2^{-8} c) 2^{-10}
d) 2^{-4} e) 2^{-9}

27. Si: $A = \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \dots}}}}$; $B = \sqrt{3 \sqrt{5 \sqrt{3 \sqrt{5 \dots}}}}$

calcular: AB

- a) 1 b) 3 c) 5
d) 15 e) 30

28. Calcular: $\sqrt{-(0,3)^{-3} + (0,25)^{-4} - (0,5)^{-2}}$

- a) 16 b) 13 c) 15
d) 17 e) 19

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. c | 7. a | 13. a | 19. c | 25. a |
| 2. e | 8. b | 14. c | 20. b | 26. a |
| 3. b | 9. c | 15. b | 21. b | 27. d |
| 4. c | 10. d | 16. e | 22. a | 28. c |
| 5. d | 11. a | 17. b | 23. d | |
| 6. c | 12. e | 18. e | 24. b | |

NÚMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS IMAGINARIOS

Las cantidades imaginarias son las raíces de índice par de cantidades negativas.

Ejemplos:

$$\sqrt{-4}; \sqrt[4]{-16}; \sqrt[8]{-12}$$

Unidad Imaginaria: la cantidad $\sqrt{-1}$ se le denomina unidad imaginaria. Según la notación de Gauss, la unidad imaginaria se representa por la letra i .

Por lo tanto $i = \sqrt{-1}$, y por definición: $i^2 = -1$

Ejemplo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA:

- $i^1 = (\sqrt{-1})^1 = i$
- $i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$
- $i^3 = i^2 \times i = -i$
- $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 \times i = i$
- $i^6 = i^4 \times i^2 = -1$
- $i^7 = i^4 \times i^3 = -i$
- $i^8 = i^4 \times i^4 = 1$

Se observa que los resultados de las potencias de la unidad imaginaria se repiten en periodos de 4 en 4 y estos valores son $i, 1, -i, 1$.

Transformación de potencia i^m , donde m es entero y positivo. Suponiendo que se desea calcular i^m , donde $m > 4$.

1.° Se divide m entre 4, de donde se tiene:

$$m = 4q + r$$

2.° $i^m = i^{4q+r} = i^{4q} \times i^r = (i^4)^q \times i^r = i^r$

$$\therefore i^m = i^r \quad \text{donde: } r = 0; 1; 2; 3$$

$$i^m = i^r \quad \begin{cases} r = 0 \Rightarrow 1 \\ r = 1 \Rightarrow i \\ r = 2 \Rightarrow -1 \\ r = 3 \Rightarrow -i \end{cases}$$

Conclusión: cuando i está elevada a una potencia positiva, si el exponente es múltiplo de 4, el resultado es la unidad, si el exponente es igual a un múltiplo de cuatro más 1 el resultado es i , si es igual a múltiplo de cuatro más 2 el resultado es -1 , y si es igual a múltiplo de cuatro más 3 el resultado es igual a $-i$.

Ejemplos:

$$1. \text{ Calcular: } E = 5i^{476} - 3i^{258} + 4i^{327} - 8i^{392} + 4i^{441}$$

Resolución:

Transformando las potencias:

$$E = 5(1) - 3i^2 + 4(i)^3 - 8(1) + 4(i)^1$$

$$E = 5 - 3(-1) + 4(-i) - 8 + 4i = 5 + 3 -$$

$$4i - 8 + 4i$$

$$E = 0$$

$$2. \text{ Simplificar: } E = \frac{i^{52} + i^{421} + i^{65} + i^{74} + i^{33}}{i^{2541} + i^{3244} - i^{2460} + i^{3581} - i^{2723}}$$

Resolución:

Efectuando las potencias indicadas:

$$E = \frac{1 + i + i + (i^2) + i}{i + 1 - 1 + i - (i)^3} = \frac{1 + i + i - 1 + i}{i + 1 - 1 + i + i} = \frac{3i}{3i}$$

$$E = 1$$

3. Calcular la expresión:

$$E = \frac{i^{-5} - i^{-15} + i^{-49} - i^{-18} + i^{-400} + 2i^{-14}}{i^{-6} - i^{-50} - i^{-23} + i^{-35} - i^{-441}}$$

Resolución:

Transformando las potencias:

$$E = \frac{\frac{1}{i^5} - \frac{1}{i^{15}} + \frac{1}{i^{49}} - \frac{1}{i^{18}} + \frac{1}{i^{400}} + \frac{2}{i^{14}}}{\frac{1}{i^6} - \frac{1}{i^{50}} - \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{35}} - \frac{1}{i^{441}}}; \text{ efectuan-}$$

do las potencias:

$$E = \frac{\frac{1}{i} - \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i} - \frac{1}{(-1)} + \frac{1}{1} + \frac{2}{(-1)}}{\frac{1}{(-1)} - \frac{1}{(-1)} - \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i}} \Rightarrow E = -3$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos son aquellos que tienen una parte real y una imaginaria. Si $Z = a + bi$ es un número complejo donde a y b pueden ser números positivos, negativos y aún nulos.

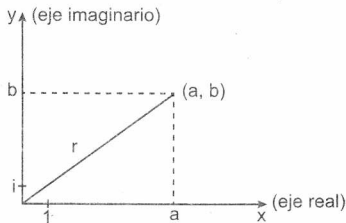
CLASES DE NÚMEROS COMPLEJOS

- **Complejo real:** es aquel cuya parte imaginaria es nula.
- **Complejo puro:** es aquel cuya parte real es nula.
- **Complejo nulo:** es aquel cuya parte real y parte imaginaria son nulas.

- **Complejo iguales:** son dos complejos que tienen iguales sus partes reales e iguales sus partes imaginarias. Por ejemplo:
Si: $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \wedge b = d$
- **Complejos conjugados:** son dos complejos que tienen iguales sus partes reales e iguales pero de signos contrarios sus partes imaginarias.
Si: $Z_1 = a + bi$ } Son dos complejos
 $Z_2 = a - bi$ } conjugados
- **Complejos opuestos:** son dos complejos que tienen iguales, pero de signos contrarios, tanto las partes reales como las imaginarias.
Si: $Z_1 = a + bi$ } Son dos complejos
 $Z_2 = -a - bi$ } opuestos

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

Representación cartesiana. Se realiza en un sistema de ejes rectangulares o cartesianos en donde el eje x sirve para representar los números reales y el eje y para representar las cantidades imaginarias. Al plano formado por los ejes real e imaginarios se le llama Plano de Gauss.



Sea: $Z = a + bi$

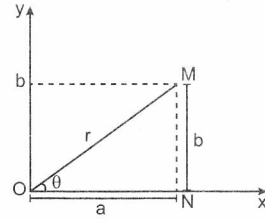
En el eje y: i = unidad de medida de los valores imaginarios.

En el eje x: 1 = unidad de medida de los valores reales.

Representación polar o trigonométrica. Para representar un complejo de esta manera es necesario conocer el radio vector, conocido con el nombre de módulo y el ángulo que forma este con la parte positiva del eje x.

r : radio vector o módulo

θ : ángulo o argumento del módulo.



Cálculo del módulo: en el triángulo rectángulo MNO:
 $(MN)^2 + (NO)^2 = (MO)^2$ (por Pitágoras)

$$\Rightarrow b^2 + a^2 = r^2$$

de donde: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Cálculo del argumento o ángulo θ : en el triángulo rectángulo MNO:

$$\tan \theta = b/a \quad \therefore \quad \theta = \arctan(b/a)$$

Apoyado en la figura, la forma polar de $a + bi$, será:

$$a + bi = r \cos \theta + i \operatorname{rsen} \theta$$

$$\Rightarrow a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

ya que: $a = r \cos \theta$ y $b = r \operatorname{sen} \theta$

Ejemplo:

$$\text{Efectuar: } E = \frac{1+i}{12-5i} - \frac{1-i}{5-12i} + \frac{10+3i}{169}$$

Resolución:

Racionalizando las dos primeras fracciones:

$$E = \frac{(1+i)(12+5i)}{12^2 - 25i^2} - \frac{(1-i)(5+12i)}{5^2 - 12^2i^2} + \frac{10+3i}{169}$$

$$E = \frac{12+5i+12i-5}{169} - \frac{5+12i-5i+12}{169} + \frac{10+3i}{169}$$

$$E = \frac{7+17i-17-7i+10+3i}{169} = \frac{13i}{169} = \frac{i}{13}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcular: $A = i^{123} + i^{432} + i^{678}$

- a) 0 b) i c) $-i$
d) 1 e) -1

2. Calcular: $B = i^{-4} + i^{-6} + i^{-8}$
 a) 0 b) $i + 1$ c) $1 - i$
 d) i e) 1
3. Calcular: $R = (2 + 2i)^2$
 a) 4 b) $4i$ c) -4 d) -8 e) $8i$
4. Calcular: $M = (1 + i)^2 - (1 - i)^2$
 a) $2i$ b) 0 c) -4
 d) $4i$ e) $-4i$
5. Calcular: $M = (1 + i)^4 - (1 - i)^4$
 a) 0 b) -8 c) $4i$ d) $-4i$ e) 8
6. Calcular: $R = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$
 a) 3 b) -2 c) $2i$
 d) 0 e) $4i$
7. Calcular: $P = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$
 a) 4 b) 0 c) $2i$
 d) -2 e) $-4i$
8. Calcular: $M = \left(\frac{1+i^5}{1-i^5} + \frac{1-i^5}{1+i^5}\right)^2$
 a) $2i$ b) $5i$ c) 0
 d) 2 e) 4
9. Reducir: $M = \frac{2}{1-i} + \frac{5}{2+i}$
 a) 0 b) $4i$ c) 3
 d) -2 e) $2i$
10. Efectuar: $A = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{1999}$
 a) 0 b) 1 c) -1
 d) i e) $-i$
11. Si: $z = 3 + 4i$, calcular: $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)$
 a) 6 b) 8 c) 10
 d) 12 e) 20
12. Calcular b para que el complejo:
 $Z = \frac{3+4i}{1+bi}$ sea imaginario puro.
- a) $1/2$ b) $2/3$ c) $-3/2$
 d) $1/4$ e) $-3/4$
13. Si a y b $\in \mathbb{R}$, indicar la condición para que:
 $Z = \frac{a+bi}{b+ai}$ se convierta en número real
 a) $a = 2b$ b) $2a = b$ c) $a^2 = b^2$
 d) $a + b = 1$ e) $a - b = 1$
14. Si: $z_1 = -2 + 3i$ y $z_2 = i - \bar{z}_1$, calcular: $\operatorname{Im}(z_2)$
 a) -4 b) $-2i$ c) 2
 d) $4i$ e) 4
15. Si: $\sqrt[3]{x+yi} = m + ni$
 calcular: $A = \left(1 - \frac{x}{m^3}\right)\left(1 + \frac{y}{n^3}\right)$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 9 e) 16
16. Calcular: $\sqrt[3]{-2+2i} - 1$
 a) 0 b) 1 c) -2
 d) $2i$ e) i
17. Reducir: $R = \sqrt[6]{i - \sqrt[6]{-8i}}$
 a) 1 b) 0 c) -1
 d) $-i$ e) i
18. Calcular: $S = i^5 + i^{10} + i^{15} + i^{20} + \dots + i^{2000}$
 a) 2000 b) $2000i$ c) $1 - i$
 d) 1 e) 0
19. Calcular n, si: $[(1+i)^9 + (1-i)^9]^n = 1024$
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
20. Cuántos valores puede tomar:
 $A = i^n + i^{-n}$; $n \in \mathbb{N}$
 a) 2 b) 3 c) 4
 d) 8 e) n
21. Sabiendo que: $\sqrt[3]{4-2i} = a + bi$
 calcular: $M = \frac{b^4 - a^4}{2a - b}$
 a) 2 b) -2 c) 4
 d) -4 e) 1

22. Calcular: $E = \sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 3i e) 4i

23. Simplificar: $R = \frac{50}{4+3i} + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i}$

- a) $9-6i$ b) $7+3i$ c) $12-5i$
d) $4+6i$ e) $2+9i$

24. Simplificar: $S = \frac{(i+11)(i+1)^{-5}}{(i-7)^7} - \frac{11-15i}{64i}$

- a) 2 b) 4 c) -2
d) $1/2$ e) $1/4$

25. Indicar el módulo de: $Z = \frac{(1+i)^{22}}{(1-i)^{20}} + \frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{16}}$

- a) 10 b) 20 c) 25
d) 12 e) 15

26. Indicar el módulo de: $Z = \sqrt{\frac{(1+3i)(2+2i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)(1-i)}}$

- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 3
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{7}$

27. Reducir: $R = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2^9\sqrt{i}}} - 1$

- a) 0 b) $2i$ c) i
d) -1 e) 1

28. Hallar n en: $[(1+i)^5 + (1-i)^5]^n = -512$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

29. Reducir: $\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)^{16}$

- a) -2^{15} b) -2^{16} c) -2^7
d) -2^{18} e) -2^{19}

30. Hallar k, para que: $Z = \frac{1+ai}{a+i} + \frac{a+3i}{1-ai}$ sea de la forma ki.

- a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 2

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. c | 7. c | 13. c | 19. b | 25. b |
| 2. e | 8. c | 14. a | 20. b | 26. a |
| 3. e | 9. c | 15. d | 21. a | 27. c |
| 4. d | 10. c | 16. e | 22. b | 28. c |
| 5. b | 11. d | 17. d | 23. a | 29. b |
| 6. b | 12. e | 18. e | 24. d | 30. e |

ECUACIONES

ECUACIÓN

Es una igualdad entre dos expresiones matemáticas en la que al menos esté presente una variable que ahora recibirá el nombre de incógnita.

$$\underbrace{A(x; y; \dots; z)}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{B(x; y; \dots; z)}_{\text{segundo miembro}}$$

Donde: A y B: expresiones matemáticas
x; y; ...; z: incógnitas

Solución de una ecuación. Una solución de una ecuación es una colección de valores (de las incógnitas), que al ser reemplazadas en la ecuación transforman a esta, en una proposición verdadera.

Ejemplo:

Sea la ecuación $x^3 = x$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow 0^3 = 0$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow 1^3 = 1$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow (-1)^3 = -1$$

Luego 0; 1 y -1 son soluciones de la ecuación.

Conjunto solución de una ecuación (CS). Es aquel conjunto formado por todas las soluciones de dicha ecuación. Si la ecuación no tiene solución, entonces su conjunto solución es el conjunto vacío \emptyset .

Ejemplo:

Sea la ecuación en x: $(x - a)^3(x - b)^5(x - c)^7 = 0$

$$\text{Si } x = a \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{Si } x = b \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{Si } x = c \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{CS} = \{a; b; c\}$$

Nota:

- En caso que la ecuación no presente soluciones entonces el conjunto solución será el conjunto nulo o vacío.
Así: $\text{CS} = \emptyset \vee \text{CS} = \{\}$
- En caso la ecuación presente infinitas soluciones entonces el conjunto de valores en el cual existe la ecuación se le denomina universo.

Ejemplo:

Halle el CS en cada caso:

- $3x + 2 = (x + 1) + 2x + 1 \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{R}$
- $\sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 2} \Rightarrow \text{CS} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$
- $\frac{3}{x - 5} = \frac{3}{x - 5} \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{R} - \{5\}$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

A las ecuaciones de acuerdo al número de soluciones podemos clasificarlas en:

Ecuaciones compatibles. Son aquellas que poseen al menos una solución. Éstas pueden ser:

- Determinadas:** en una ecuación compatible determinada, sí es posible determinar la cantidad de sus soluciones.
- Indeterminada:** en una ecuación compatible indeterminada no es posible determinar la cantidad de sus soluciones.

Ecuaciones incompatibles (Inconsistentes). Son aquellas ecuaciones que no poseen soluciones, su conjunto solución: $\text{CS} = \emptyset$

Ejemplos:

- $x + 3 = 5$ tiene $\text{CS} = \{2\}$
 \Rightarrow Ec. compatible determinada.
- $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ tiene $\text{CS} = \mathbb{R}$
 \Rightarrow Ec. compatible indeterminada pues tiene infinitas soluciones.
- $x + 7 = x + 2$ tiene $\text{CS} = \emptyset$
 \Rightarrow Ec. incompatible pues no tiene solución.

ESTUDIO DE LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA EN x

Sea: $Ax = B$

Caso I

$$\text{Si } A \neq 0; x = B/A \Rightarrow \text{CS} = \{B/A\}$$

La ecuación posee solución única.

\therefore La ecuación es compatible determinada.

Caso II

$$\text{Si } A = 0 \wedge B = 0; 0(x) = 0 \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{C}$$

La ecuación posee infinitas soluciones.

\therefore La ecuación es compatible indeterminada.

Caso III

$$\text{Si } A = 0 \wedge B \neq 0; 0(x) = B \Rightarrow \text{CS} = \emptyset$$

\therefore La ecuación es incompatible.

Ejemplo:

Sea la ecuación en x , con parámetro p :

$$(p-5)(p-2)x = (p-2)(p-3)$$

$$\text{Si } p = 2 \Rightarrow 0(x) = 0 \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{C}$$

Tenemos infinitas soluciones, luego sería una ecuación compatible indeterminada.

$$\text{Si } p = 3 \Rightarrow (-2)(1)x = 0 \Rightarrow \text{CS} = \{0\}$$

Tenemos 1 solución, luego sería una ecuación compatible determinada.

$$\text{Si } p = 5 \Rightarrow 0(x) = 6 \Rightarrow \text{CS} = \emptyset$$

No tenemos solución alguna, luego sería una ecuación incompatible.

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos o más ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

$$E_1: \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 14 \Rightarrow \text{CS} = \{12\}$$

$$E_2: 5x - 36 = 2x \Rightarrow \text{CS} = \{12\}$$

$$E_3: x + 8 = 20 \Rightarrow \text{CS} = \{12\}$$

Son ecuaciones equivalentes

ECUACIONES POLINOMIALES CON UNA INCÓGNITA

Forma general de una ecuación polinomial de grado n :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 / a_0 \neq 0 \wedge n \in \mathbb{Z}^+$$

Raíz de un polinomio. Diremos que α es una raíz de un polinomio $P(x)$ si y solo si $P(\alpha) = 0$

Consecuencia: α es raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - \alpha)$ es factor de $P(x)$.

Ejemplo:

$$\text{Sea: } P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$\text{se observa que: } P(1) = 0; P(-1) = 0; P(2) = 0$$

Luego, -1 ; 1 ; 2 son raíces de dicho polinomio.

Por tanto: $(x + 1)$; $(x - 1)$; $(x - 2)$ son factores de dicho polinomio.

Un método práctico para hallar las raíces de un polinomio es factorizar sobre \mathbb{C} al polinomio e igualar cada factor a cero.

Ejemplo:

Halleemos las raíces de:

$$P(x) = (x + 2)^3(x - 5)^2(x - 8)$$

Igualando cada factor a cero

$$\left. \begin{aligned} (x + 2) &= 0 \Rightarrow x_1 = -2 \\ (x + 2) &= 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ (x + 2) &= 0 \Rightarrow x_3 = -2 \end{aligned} \right\} x = -2 \text{ es raíz de multiplicidad tres o raíz triple.}$$

$$\left. \begin{aligned} (x - 5) &= 0 \Rightarrow x_4 = 5 \\ (x - 5) &= 0 \Rightarrow x_5 = 5 \end{aligned} \right\} x = 5 \text{ es raíz de multiplicidad 2 o raíz doble.}$$

$$(x - 8) = 0 \Rightarrow x_6 = 8 \quad \left. \right\} x = 8 \text{ es raíz simple}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Toda ecuación polinomial de coeficientes numéricos posee por lo menos una raíz que generalmente es compleja.

Corolario. Toda ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n raíces contadas con su respectiva multiplicidad.

Sean las raíces de $P(x)$ polinomio de grado n con coeficiente principal a .

$$x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; \dots; x_n$$

el polinomio puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

Ejemplo:

Un polinomio con raíces $\{-2; -1; 1; 2\}$ es:

$$P(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

Sea la ecuación polinomial $P(x) = 0$

- Llamaremos raíces de la ecuación polinomial a las raíces de $P(x)$.
- Toda raíz de la ecuación es también solución de la ecuación.

TEOREMA DE CARDANO - VIETTE

Sea la ecuación polinomial de grado n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 / a_0 \neq 0$$

Cuyas raíces son $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$

- **Suma de raíces**

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$
- **Suma de productos binarios**

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots = \frac{a_2}{a_0}$$
- **Suma de productos ternarios**

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + \dots = -\frac{a_3}{a_0}$$

• **Productos de raíces**

$$S_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Teorema (de paridad de raíces)

Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial, de grado no menor a dos, de coeficientes reales. El número complejo $(a + bi)$ es raíz de $P(x) = 0$ si y solo si $(a - bi)$ es raíz de $P(x) = 0$; $b \neq 0$.

Ejemplo:

Construir una ecuación de menor grado, una de cuyas raíces es: $5 - 3i$

Resolución:

Por el teorema si $x_1 = 5 - 3i$ es raíz entonces $x_2 = 5 + 3i$ también lo será, luego una de las ecuaciones de menor grado es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - 10x + 34 = 0$$

Teorema

Sea $P(x) = 0$ una ecuación polinomial de grado no menor a dos, de coeficientes racionales. El número irracional $(a + \sqrt{b})$ es raíz de $P(x) = 0$ si y solo si $(a - \sqrt{b})$ es raíz de $P(x) = 0$; $\sqrt{b} \in \mathbb{I}$

Ejemplo:

Si una de las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$; $\{a; b\} \in \mathbb{Q}$ es $3 + \sqrt{2}$. Halle a y b .

Resolución:

Como los coeficientes de la ecuación son números racionales, aplicamos el teorema.

Como $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ es raíz entonces $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ también es raíz; formaremos la ecuación

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

Comparándola con $x^2 + ax + b = 0$ se tiene:

$$a = -6 \text{ y } b = 7$$

ECUACIÓN LINEAL (Ec. de 1.º grado)

Son aquellas ecuaciones polinomiales que se reducen a la siguiente forma general.

$$P(x) = ax + b = 0 / a \neq 0$$

Resolución:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

$$\Leftrightarrow ax + 0 = -b \Leftrightarrow ax = -b$$

$$(\text{Como } a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \neq 0) \Leftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}(-b)$$

$$\Leftrightarrow 1(x) = \frac{1}{a}(-b) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \quad \therefore \text{CS} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

ECUACIÓN CUADRÁTICA (Ec. de 2.º grado)

Forma general:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

Resolución:

1. Por factorización:

$$\text{Sea: } 6x^2 - 17x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 4)(2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \vee 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4/3 \vee x = 3/2 \quad \therefore \text{CS} = \left\{ \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\}$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 4/3; x_2 = 3/2$$

2. Por fórmula:

sea $P(x) = ax^2 + bx + c = 0 / a \neq 0$ podemos demostrar que las raíces de esta ecuación viene dada por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula general de la ecuación cuadrática

Análisis de sus soluciones

Sea la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0 \text{ de coeficientes reales}$$

Definimos su discriminante (Δ), así: $\Delta = b^2 - 4ac$

Entonces las raíces serán:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Caso I

Si $\Delta = 0$: las raíces son iguales ($x_1 = x_2$) y reales. La ecuación posee solución única. Además $ax^2 + bx + c$, es un trinomio cuadrado perfecto.

Caso II

Si $\Delta > 0$: las raíces son diferentes ($x_1 \neq x_2$) y reales. La ecuación presenta dos soluciones.

Caso III

Si $\Delta < 0$: las raíces son complejas no reales y conjugadas. ($x_1 = u + vi \Rightarrow x_2 = u - vi$); $v \neq 0$.

Propiedades:

Sea la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$ de raíces x_1 y x_2 :

• Suma de raíces: $x_1 + x_2 = -b/a$

• Producto de raíces: $x_1 x_2 = c/a$

• Diferencia de raíces:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

• Reconstrucción de la ecuación:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Observación:

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ / $a \neq 0$, de raíces x_1 y x_2 no nulas.

• Posee raíces simétricas $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

• Posee raíces recíprocas $\Leftrightarrow x_1 x_2 = 1$

Teorema

Si las ecuaciones cuadráticas:

$$ax^2 + bx + c = 0; abc \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0; mnp \neq 0$$

poseen igual conjunto solución.

Se cumple: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

ECUACIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR

Son aquellas ecuaciones polinomiales que se reducen a la siguiente forma general:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Donde: $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 2$

Resolución:

Para resolver estas ecuaciones se han desarrollado una diversidad de técnicas y artificios, que en su mayoría permiten hallar los valores aproximados de sus raíces.

En el presente capítulo, bajo ciertas condiciones la resolución de algunas de estas ecuaciones hace uso de los siguientes teoremas:

Teorema I

Toda ecuación polinomial de coeficientes reales admite raíz imaginaria $(a + bi)$, si y solo si $(a - bi)$ es raíz imaginaria, donde $b \neq 0$.

Teorema II

Toda ecuación polinomial de coeficientes racionales tiene raíz $(a + \sqrt{b})$, si y solo si $(a - \sqrt{b})$ es raíz, donde $a \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{I}$

Teorema III

Toda ecuación polinomial de coeficientes racionales tendrá como raíces a: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$ si y solo si una de ellas está presente (\sqrt{a} , \sqrt{b} son irracionales). En seguida analicemos algunas ecuaciones polinomiales de grado superior muy importantes.

ECUACIÓN CÚBICA

Llamada también ecuación polinomial de grado 3 cuya forma general es:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0; a \neq 0$$

Mediante la sustitución x por $(x - \frac{b}{3a})$ se puede obtener la siguiente ecuación en x

$$x^3 + px + q = 0 \quad \dots (I)$$

Para solucionar la ecuación anterior, definamos

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \text{ Entonces las raíces de (I) serán:}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} w + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} w^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} w$$

$$\text{donde: } w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; i^2 = -1$$

Ejemplo:

$$\text{Resuelva: } x^3 - 15x - 126 = 0$$

Resolución:

$$\sqrt{\Delta} = 62; x_1 = 5 + 1 = 6$$

$$x_2 = 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$x_3 = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore \text{CS} = \{6; -3 + 2\sqrt{3}i; -3 - 2\sqrt{3}i\}$$

ECUACIÓN BICUADRADA

Es aquella ecuación de cuarto grado que presenta la siguiente forma general:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0; abc \neq 0$$

Teoremas

Sea la bicuadrada en x :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0; abc \neq 0$$

Si m y n son dos raíces no simétricas, entonces: $-m$ y $-n$ también lo serán.

Luego:

$CS = \{m; -m; n; -n\}$
$m^2 + n^2 = -b/a$
$m^2 n^2 = c/a$

Reconstruir una ecuación bicuadrada. Conociendo dos raíces, cuya suma no sea cero, (no simétricas).

Una ecuación bicuadrada en x , donde dos de sus raíces son m y n ($m + n \neq 0$) viene dada por:

$$x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2 n^2 = 0$$

ECUACIÓN BINOMIA

Es aquella ecuación de dos términos y que presenta la siguiente forma general: $ax^n + b = 0$

donde: $ab \neq 0; n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 3$

Para resolver esta ecuación podemos aplicar productos notables o los criterios de factorización, así como también las aplicaciones de los números complejos.

$$\text{En: } ax^n + b = 0 \Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

$$\text{Luego: si: } \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}(1) = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n]{1}$$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right]$$

$$k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$$

$$\text{Si: } \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}(-1) = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n]{-1}$$

$$\Rightarrow x_k = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \right]$$

$$k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$$

ECUACIÓN TRINOMIA

Es aquella ecuación de tres términos y que presenta la siguiente forma general:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \text{ donde: } abc \neq 0, n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 2$$

Para su resolución haremos un cambio de variable: $x^n = y$, formándose una ecuación cuadrática cuya solución es sencilla, proporcionando luego las soluciones de y a la variable original x^n originando ecuaciones binomias, de resolución ya conocida.

En la ecuación: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ hacemos:

$$x^n = y \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En (1):

$$x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

POLINOMIO RECÍPROCO

Dado el polinomio $P(x)$ no constante y de grado n con término independiente no nulo diremos que $P(x)$ es recíproco si y solo si se cumple:

$$P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 7x + 2$
- $P(x) = 6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6$

ECUACIÓN RECÍPROCA

Es aquella ecuación cuyos coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son de igual valor; presentan la siguiente forma general:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$$

Donde: $n \in \mathbb{Z} / n \geq 2$

Estas ecuaciones si presentan como solución a m , entonces también aceptarán como solución a $x = 1/m$, como m y $1/m$ son recíprocos y raíces de la ecuación, a esta singularidad se debe el nombre de ecuación recíproca.

Para la resolución se debe agrupar los términos equidistantes de los extremos, factorizar $x^{n/2}$ (si n es par) para luego realizar el siguiente cambio de variable:

$$x + 1/x = y \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2 \\ x^3 + 1/x^3 = y^3 - 3y \end{cases}$$

Ecuación recíproca de grado par. Como casos particulares podemos indicar las siguientes ecuaciones:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Ecuación recíproca de grado impar. Como casos particulares se tienen ecuaciones de la forma:

$$bx^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

Esta ecuación tiene como solución a: $x = 1 \vee x = -1$, entonces se podrá aplicar la regla de Ruffini para tener una ecuación de grado menor a la respuesta.

ECUACIÓN FRACCIONARIA

Es aquella que se presenta como la división de dos

polinomios, cuya forma general es: $\frac{f(x)}{h(x)} = 0$

donde $h(x)$ es un polinomio no constante.

Resolución:

Para resolver esta ecuación, se sugiere seguir, los siguientes pasos:

- Asegurar la existencia de la expresión $\frac{f(x)}{h(x)}$, para lo cual se debe asegurar que $h(x) \neq 0$. De aquí se obtiene un conjunto de valores que puede asumir la incógnita.
- Procurar, en lo posible, transformar la fraccionaria, en una polinomial; cuya resolución la conocemos obteniéndose un conjunto solución.
- Finalmente el conjunto solución de la ecuación fraccionaria, es la intersección de los conjuntos obtenidos en los pasos anteriores.

SISTEMA DE ECUACIONES

Se llama así al conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, las cuales pueden verificarse para algunos valores asignados a sus incógnitas o tal vez nunca se verifique:

Ejemplo:

$x + y = 2$ es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas
 $x - y = 4$

$x + y + 3z = 5$ es un sistema lineal
 $2x + y - z = 4 \Rightarrow$ de 3 ecuaciones con
 $7x + 9y - 2z = 14$ 3 incógnitas

Sistema lineal homogéneo. Es aquel sistema donde sus términos independientes son iguales a cero.

Ejemplo:

$2x + 5y = 0 \Rightarrow$ sistema lineal homogéneo
 $3x - 7y = 0$

$5x + 7y + 2z = 0$
 $2x - y - z = 0 \Rightarrow$ sistema lineal homogéneo
 $3x + y + z = 0$

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Es una colección de números que verifican en forma simultánea a un conjunto de ecuaciones lineales.

Ejemplo:

El par ordenado (2; 3) es solución del sistema:

$$x + y = 5$$

$$2x + y = 7$$

pues si asignamos a x el valor de 2 y a y el valor de 3, entonces se verifican ambas ecuaciones.

Solución trivial de un sistema lineal. Se llama así cuando la colección de números está formado por ceros.

Por ejemplo: (0; 0), (0; 0; 0), (0; 0; 0; 0), etc.; son soluciones triviales.

Sistema de ecuaciones que presentan soluciones triviales. Los sistemas de ecuaciones lineales que son homogéneos, son los que presentan soluciones triviales, así por ejemplo:

$$3x + 2y + z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

Es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que tiene como solución $(0; 0; 0)$.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones. Como el conjunto formado por las soluciones del sistema lineal.

Conjunto solución de un sistema lineal que no presenta solución. Es el conjunto nulo o vacío, es decir: $CS = \{ \} \text{ o } CS = \emptyset$

DE ACUERDO A LA CANTIDAD DE SOLUCIONES, ¿QUÉ CLASES DE SISTEMAS DE ECUACIONES EXISTE?

Existen las compatibles determinadas, compatibles indeterminadas e incompatibles.

Propiedades

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$ax + by = c$$

$$mx + ny = p$$

Entonces se cumple:

1. $\boxed{an \neq bm}$ cuando se tiene solución única (c. determinado)
2. $\boxed{an = bm \wedge bp = nc}$ cuando tiene infinitas soluciones (c. indeterminado)
3. $\boxed{an = bm \wedge bp \neq nc}$ cuando no tiene solución (incompatible)

REGLA DE CRAMER

Sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2 o más incógnitas.

Sea el sistema siguiente: $ax + by = c$

$$mx + ny = p$$

Se define:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}$$

Donde:

Δs : determinante respecto al sistema

Δx : determinante respecto a la incógnita x

Δy : determinante respecto a la incógnita y

Para hallar los valores de x e y se utiliza las siguientes relaciones:

$$\boxed{x = \Delta x / \Delta s}$$

$$\boxed{y = \Delta y / \Delta s}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Hallar las raíces de la ecuación:

$$\frac{x(x-2a)}{\sqrt{bc}} + \frac{a-x}{\sqrt{c}} - \frac{a-x}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{a^2}{\sqrt{bc}}$$

Resolución:

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por \sqrt{bc} , se obtiene:

$$x(x-2a) + \sqrt{b}(a-x) - \sqrt{c}(a-x) = \sqrt{bc} - a^2$$

Ordenando e igualando a cero:

$$x^2 - 2ax + a\sqrt{b} - \sqrt{b}x - a\sqrt{c} + \sqrt{c}x = \sqrt{bc} - a^2$$

$$x^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{b} - 2a)x + a\sqrt{b} - a\sqrt{c} - \sqrt{bc} + a^2 = 0$$

$$x^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{b} - 2a)x + (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{c}) = 0$$

$$[x - (a + \sqrt{b})][x - (a - \sqrt{c})] = 0$$

Igualando a cero los factores y despejando:

$$x_1 = a + \sqrt{b} \quad \wedge \quad x_2 = a - \sqrt{c}$$

2. ¿Cuáles son los valores de p y q, para que las raíces de la ecuación: $x^2 + px + q = 0$, sean también p y q?

Resolución:

Sean x_1 y x_2 raíces de la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0$$

Por dato: $x_1 = p$; $x_2 = q$

Por propiedad de las raíces de una ecuación de 2.º grado: $x_1 + x_2 = -p$

$$x_1 x_2 = q$$

Reemplazando los valores de x_1 y x_2 por razón de enunciado: $p + q = -p \Rightarrow q = -2$

$$pq = q \Rightarrow p = 1$$

3. ¿Qué valor debe tener c, en la ecuación: $x^2 + 8x + c = 0$ para que una raíz sea inversa de la otra?

Resolución:

La ecuación: $x^2 + 8x + c = 0$

Sean sus raíces: x_1 y x_2

Por propiedad de las raíces en una ecuación cuadrática: $x_1 x_2 = c/1 \dots (I)$

Por dato del problema: $x_1 x_2 = 1$

(El producto de dos cantidades siendo una la inversa de la otra siempre es la unidad)

Reemplazando en (I):

$$1 = c/1 \Rightarrow 1 = c$$

4. En la ecuación: $2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$, ¿qué valor positivo debe darse a m par que las raíces difieran en uno?

Resolución:

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación:

$$2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$$

Por dato: $x_1 - x_2 = 1 \dots (I)$

Por propiedad de las raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-(m-1)}{2} \dots (II)$$

$$x_1 x_2 = \frac{(m+1)}{2} \dots (III)$$

Sumando (I) + (II), se logra: $x_1 = \frac{m+1}{4}$

Reemplazando este valor en (III), se logra: $x_2 = 2$

Reemplazando x_1 y x_2 en (II):

$$\frac{m+1}{4} + 2 = -\frac{m-1}{2}, \text{ donde: } m = 11$$

5. Hallar el producto de las raíces de la ecuación: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 5$

Resolución:

Se tiene: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 5$

También: $\sqrt{x+3} = 5 + \sqrt{x-2}$

Elevando al cuadrado:

$$x+3 = 25 + 10\sqrt{x-2} + x-2$$

$$\Rightarrow -20 = 10\sqrt{x-2} \quad \therefore -2 = \sqrt{x-2}$$

La ecuación no tiene solución pues no existe ningún número real tal que su raíz cuadrada sea negativa.

6. ¿Cuál es el valor de y en el sistema de ecuaciones simultáneas: $2x + 3\sqrt{y} = 16$

$$8x - 2\sqrt{y} = 36$$

Resolución:

$$\text{Sistema: } 2x + 3\sqrt{y} = 16 \quad \dots (I)$$

$$8x - 2\sqrt{y} = 36 \quad \dots (II)$$

Multiplcando la (I) por -4 :

$$-8x - 12\sqrt{y} = -64 \quad \dots (III)$$

$$8x - 2\sqrt{y} = 36 \quad \dots (IV)$$

Sumando (III) + (IV):

$$-14\sqrt{y} = -28 \Rightarrow \sqrt{y} = 2 \quad \therefore y = 4$$

7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3$$

$$25x - 9y = 81$$

encontrar el valor de $(x + y)$.

Resolución:

$$\text{El sistema: } 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 3 \quad \dots (I)$$

$$25x - 9y = 81 \quad \dots (II)$$

$$\text{De (II): } (5\sqrt{x})^2 - (3\sqrt{y})^2 = 81$$

$$(5\sqrt{x} + 3\sqrt{y}) \cdot (5\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) = 81$$

$$\text{De (I): } 5\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 27 \quad \dots (III)$$

Sumando miembro a miembro (I) + (III)

$$\text{Se logra: } 10\sqrt{x} = 30 \Rightarrow x = 9$$

Reemplazando en (II): $25(9) - 9y = 81$

De donde: $y = 16$

Se pide: $x + y = 16 + 9 = 25$

8. Dado el sistema de ecuaciones:

$$x - y = 1,3$$

$$\sqrt{10x} - \sqrt{10y} = 1,0$$

encontrar el valor de $(x + y)$

Resolución:

$$\text{El sistema: } x - y = 1,3 \quad \dots (I)$$

$$\sqrt{10x} - \sqrt{10y} = 1 \quad \dots (II)$$

$$\text{De (I): } (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 1,3 \quad \dots (III)$$

$$\text{De (II): } \sqrt{10}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 1$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \dots (IV)$$

Reemplazando (IV) en (III):

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 1,3$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 1,3\sqrt{10} \quad \dots (V)$$

Sumando (V) + (IV) miembro a miembro:

$$2\sqrt{x} = 1,3\sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = 4,9; y = 3,6$$

Se pide: $x + y = 4,9 + 3,6 = 8,5$

EJERCICIOS PROPUESTOS 1

1. Resolver:
 $-3(2x + 7) + (-5x + 6) - 8(1 - 2x) - (x - 3) = 0$

a) 2 b) -3 c) 4
 d) 5 e) 7

2. Resolver: $x - (5 - x) = 3 - (-2x + 8)$

a) 5/2 b) 0
 c) 1 d) indeterminado
 e) incompatible

3. Resolver: $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{5}$

a) 1 b) 5/7 c) 3/8
 d) 2/9 e) 11/7

4. Resolver: $\frac{x-3}{2} = 2 - \frac{x-2}{3}$

a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

5. Resolver: $\frac{1}{3}(x + 3) + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(x - 1) - (x - 3)$

a) 13/5 b) 18/5 c) 3/2
 d) 8/5 e) 18/15

6. Resolver: $2x - \left(2x - \frac{3x-1}{8}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right) - \frac{1}{4}$

a) 1/13 b) 2/13 c) 7/19
 d) 13/15 e) 19/23

7. Resolver: $(x - 2)^2 = 1 + (3 - x)^2$

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) 7

8. Resolver: $(4 - 5x)(4x - 5) = (10x - 3)(7 - 2x)$

a) 1/15 b) 2/35 c) 1/35
 d) 4/9 e) 3/17

9. Resolver: $(x + 3)^3 - x^3 - 9x^2 = 54$

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) -2

10. Resolver: $x - 5 + \frac{4}{x-6} = 7 - x + \frac{4}{x-6}$

a) 6
 c) 6 y -6
 e) incompatible

b) -6
 d) indeterminado

11. Resolver: $x - 4 + 2\sqrt{5 - x} = 8 - x + \sqrt{20 - 4x}$

a) 6 b) -6
 c) -6 y 6 d) indeterminado
 e) incompatible

12. Hallar el valor de x en:

$$2 + \frac{5}{x-2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{x-2} - x - 2$$

a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = \emptyset$ c) $x = 1/3$
 d) $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ e) $x = 3/2$

13. Resolver: $\frac{1}{3 + \frac{1}{8\frac{1}{5} - x}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{x + \frac{1}{5}}}$

a) 4 b) $3\frac{1}{5}$ c) $2\frac{3}{5}$
 d) 3 e) 1

14. En la siguiente ecuación:

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \dots + (x + n) = n^2$$

donde: $n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 2000$; el valor de x es:

a) $\frac{(2n+1)}{2}$ b) $\frac{(n+1)}{2}$ c) $\frac{3n}{2}$
 d) $\frac{n}{2}$ e) $\frac{(n-1)}{2}$

15. Hallar el valor de x en: $\frac{x-a}{ab} - \frac{x-b}{ac} = \frac{x-c}{bc}$

a) $\frac{a^2}{a+b-c}$ b) $\frac{b^2}{a+b-c}$
 c) $\frac{c^2}{c+a-b}$ d) $\frac{b^2}{b+c-a}$
 e) $\frac{abc}{a+b+c}$

16. Luego de resolver: $\frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}} = 3$ indique

el valor de $\sqrt{x^{-1} + 1}$

- a) 4 b) 3,5 c) 3
d) 2,5 e) 2
17. Resolver: $\frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = x$
a) $a+b$ b) $a-b$ c) a
d) b e) ab
18. Resolver: $\frac{a}{b}\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$
a) $a+b$ b) $a-b$ c) a
d) b e) ab
19. Resolver: $\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + 2$
a) $a-b$ b) $(a-b)^2$ c) $a+b$
d) $(a+b)^2$ e) ab
20. Resolver: $2x+3y=8 \wedge 4x+5y=14$
calcular xy
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
21. Resolver: $2x+3y=-2 \wedge 5x+7y=11$
hallar $x+y$.
a) -20 b) 10 c) 15
d) 4 e) 3

22. Si: $7x-9y=39 \wedge 2x-16=5y$
indique xy
a) -6 b) 1 c) -1
d) 15 e) 18
23. Resolver: $30x-23y=136 \wedge 24x+47y=-22$
hallar xy
a) 5 b) -2 c) -15
d) -18 e) -6
24. Resolver: $x+1=1/(2y) \wedge x-1=1/y$
hallar: xy
a) $-\frac{1}{4}$ b) -3 c) 12
d) $3/4$ e) $1/4$
25. Resolver: $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 2 \wedge x-y=4$
calcular: $x+y$
a) 3 b) 7 c) 10
d) 12 e) 15

CLAVES

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. d | 6. c | 11. e | 16. a | 21. c |
| 2. d | 7. a | 12. d | 17. b | 22. a |
| 3. b | 8. c | 13. a | 18. a | 23. e |
| 4. e | 9. c | 14. c | 19. b | 24. d |
| 5. d | 10. e | 15. b | 20. b | 25. c |

DESIGUALDADES E INECUACIONES

DESIGUALDADES

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales, mediante los símbolos: $<$; \leq ; $>$; \geq .

Luego, sean $a, b \in \mathbb{R}$

Si: $a > b$ se lee a es mayor que b

$a < b$ se lee a es menor que b

$a \geq b$ se lee a es mayor o igual que b

$a \leq b$ se lee a es menor o igual que b

Definición de $> y <$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a > b$ si y solo si $a - b$ es positivo
2. $a < b$ si y solo si $b - a$ es positivo

Ejemplos:

- $3 < 5$ porque $5 - 3 = 2$ y 2 es positivo
- $-10 < -6$ porque $-6 - (-10) = 4$ y 4 es positivo.
- $7 > 2$ porque $7 - 2 = 5$ y 5 es positivo.
- $-2 > -7$ porque $-2 - (-7) = 5$ y 5 es positivo.
- $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ porque $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{12}$ es positivo

Definición de $\leq y \geq$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$

1. $a \leq b$ si y solo si $a < b$ o $a = b$
2. $a \geq b$ si y solo si $a > b$ o $a = b$

Las propiedades $a < b$, $a > b$, $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan desigualdades. En particular, $a < b$ y $a > b$ se llaman desigualdades estrictas, mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de desigualdades no estrictas.

De la definición de $< y >$

$a > 0$ si y solo si a es positivo

$a < 0$ si y solo si a es negativo

LEY DE TRICOTOMÍA

Para cualquier número real " a ", una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple:

$$a < 0 \vee a = 0 \vee a > 0$$

Corolario. Para cualesquiera dos elementos $a, b \in \mathbb{R}$, una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple: $a < b \vee a = b \vee a > b$

Prueba. Sean a y b números reales, entonces $(-b)$ también es real, luego por la Ley de Clausura para la adición (+) en \mathbb{R} se tiene que $a + (-b)$ es real, es decir $(a - b) \in \mathbb{R}$.

Aplicando la Ley de Tricotomía para $(a - b) \in \mathbb{R}$:

$a - b < 0 \vee a - b = 0 \vee a - b > 0$ equivalentemente (por las definiciones (1), (2) sobre $<$; $>$, y por el principio: la diferencia de dos números es cero si y solo si son iguales).

$$a < b \vee a = b \vee a > b$$

TEOREMA Y PROPIEDADES DE $> y <$

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

1. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$
2. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$
3. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$; (propiedad transitiva)
4. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
5. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$
6. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$
7. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$

La propiedad (1) anterior establece que la suma de dos números positivos es positiva, y la propiedad (2) establece que el producto de dos números positivos es positivo.

INTERVALOS

Sea I un subconjunto de \mathbb{R} ($I \subset \mathbb{R}$).

Decimos que I es un intervalo, si y solo si es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre dos extremos (que pueden ser finitos o ideales), llamados extremos inferior y extremo superior.

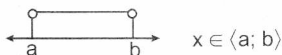
CLASES DE INTERVALOS

Si I es un intervalo, puede ser: acotado o no acotado.

Intervalo acotado. Es aquel intervalo cuyos extremos son finitos.

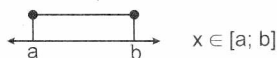
El conjunto de los números x que satisfacen la desigualdad $a < x < b$ se denomina **intervalo abierto** y se denota por $\langle a; b \rangle$.

Por tanto: $\langle a; b \rangle = \{x / a < x < b\}$



El **intervalo cerrado** de a a b es el intervalo abierto $\langle a; b \rangle$ junto con los dos extremos del segmento a y b , y se denota por $[a; b]$. Así:

$$[a; b] = \{x / a \leq x \leq b\}$$



El **intervalo semiabierto por la izquierda** es el intervalo abierto $\langle a; b \rangle$ junto con el extremo derecho b .

Este intervalo se denota por $\langle a; b]$; de modo que

$$\langle a; b] = \{x / a < x \leq b\}$$

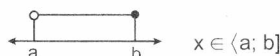


Figura 1

Se define el **intervalo semiabierto por la derecha** de manera similar y se denota por $[a; b)$. Así:

$$[a; b) = \{x / a \leq x < b\}$$

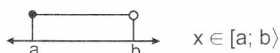


Figura 2

El intervalo $\langle a; b \rangle$ se muestra en la figura 1, y el intervalo $[a; b]$ se presenta en la figura 2. Se utilizará el símbolo $+\infty$ (infinito positivo o más infinito) y el símbolo $-\infty$ (infinito negativo o menos infinito); sin embargo, tenga cuidado en no confundir estos símbolos con números reales, ya que no cumplen las propiedades de dichos números.

Intervalos no acotados. Es aquel intervalo donde al menos un extremo es el ideal $+\infty$ o $-\infty$.

$$\langle a; +\infty \rangle = \{x / x > a\}$$

$$\langle -\infty; b \rangle = \{x / x < b\}$$

$$[a; +\infty) = \{x / x \geq a\}$$

$$\langle -\infty; b] = \{x / x \leq b\}$$

$$\langle -\infty; +\infty \rangle = \mathbb{R}$$

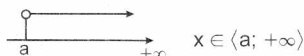


Figura 3

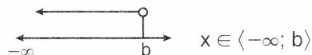


Figura 4

La figura 3 muestra el intervalo $\langle a; +\infty \rangle$ mientras que la figura 4 presenta el intervalo $\langle -\infty; b \rangle$. Observe que $\langle -\infty; +\infty \rangle$ representa el conjunto de todos los números reales.

Para cada uno de los intervalos $\langle a; b \rangle$, $[a; b]$, $\langle a; b]$ y $\langle a; b \rangle$ los números a y b se denominan **extremos** del intervalo. El intervalo cerrado $[a; b]$ contiene a los dos extremos, mientras que el intervalo abierto $\langle a; b \rangle$ no contiene a ninguno de sus extremos. El intervalo $[a; b)$ contiene a su extremo izquierdo pero no al derecho, y el intervalo $\langle a; b]$ contiene a su extremo derecho pero no al izquierdo.

Un intervalo abierto puede considerarse como el intervalo que no contiene a sus extremos; por el contrario, un intervalo cerrado puede considerarse como el intervalo que contiene a todos sus extremos.

En consecuencia, el intervalo $[a; +\infty)$ se considera como un intervalo cerrado porque contiene a su único extremo a . De forma semejante, $\langle -\infty; b]$ es un intervalo cerrado, en tanto que, $\langle a; b \rangle$ y $\langle -\infty; b \rangle$ son abiertos. Los intervalos $[a; b]$ y $\langle a; b]$ no son abiertos ni cerrados. El intervalo $\langle -\infty; +\infty \rangle$ no tiene extremos, y se considera tanto abierto como cerrado.

OPERACIONES CON INTERVALOS

Sean A y B intervalos, se definen y se denotan:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$CA = A^C = A' = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\}$$

A' = complemento de A respecto a \mathbb{R}

$$A' = \mathbb{R} - A$$

Teoremas adicionales. Sean $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$

- $\forall a \in \mathbb{R}; a^2 \geq 0$
- $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ / a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$
- $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
- $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$
- $a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0$

- Si a y b tienen el mismo signo:
 $\Rightarrow a < x < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{x} > \frac{1}{b}$
- $a < x < b$
 $\Rightarrow \begin{cases} a^2 < x^2 < b^2 & ; \text{ si } 0 < a < b \\ 0 \leq x^2 < \max\{a^2, b^2\} & ; \text{ si } a < 0 \wedge 0 < b \\ b^2 < x^2 < a^2 & ; \text{ si } a < b < 0 \end{cases}$
- $a + \frac{1}{a} \geq 2; \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $b + \frac{1}{b} \leq 2; \forall b \in \mathbb{R}^-$
- $a^2 + b^2 \geq 2ab; \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc; \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

INECUACIÓN

Es una desigualdad que se establece entre dos expresiones matemáticas las cuales tienen por lo menos una variable, la cual se denominará incógnita.

Esta desigualdad solo se verifica para algunos valores determinados de las incógnitas o tal vez nunca se verifique. Por ejemplo, la desigualdad: $2x + 3 > x + 5$ es una inecuación porque tiene una incógnita x , y se verifica para valores de x mayores que 2. También, la desigualdad: $\sin(x) + 2 \geq 5$, es una inecuación que nunca se verifica, porque los valores del $\sin(x)$ están comprendidos en el intervalo $[-1; 1]$ para todo x real, en consecuencia $\sin(x) + 2$ está en el intervalo $[1; 3]$ y ningún valor de este intervalo es mayor o igual que 5.

Solución particular. Es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifica la inecuación.

Por ejemplo, en la inecuación $2x + 3 > x + 5$, una solución particular es $x = 5$, pues $2(5) + 3 > 5 + 5$ es cierto.

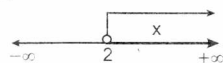
También en la inecuación $x + y \geq 2$, para $x = 1$ e $y = 1$ la inecuación se verifica, pues $1 + 1 \geq 2$ es cierto, luego $(1; 1)$ es una solución particular.

Conjunto solución. Es aquel conjunto denotado por CS que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no tiene solución, entonces diremos que el CS es el conjunto vacío.

Resolver una inecuación. Significa hallar un conjunto solución. La resolución se realiza solo empleando pasos equivalentes, por ejemplo, si queremos:

$$\begin{aligned} 3x + 3 > 2x + 5 &\Leftrightarrow 3x + 3 + (-3) > 2x + 5 + (-3) \\ &\Leftrightarrow 3x > 2x + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x + (-2x) > 2x + (-2x) + 2 \\ &\Leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Gráficamente:



Luego: $CS = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\} = \langle 2; +\infty \rangle$

INECUACIÓN LINEAL

Forma general: $P(x) = ax + b \geq 0$; $a \neq 0$

siendo: $a, b \in \mathbb{R}$

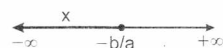
Ejemplo:

Determine x en $ax + b \geq 0$; $a < 0$

Resolución:

$$\begin{aligned} ax + b \geq 0 &\Rightarrow ax + b + (-b) \geq 0 + (-b) \\ &\Rightarrow ax \geq -b; a < 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{a}(ax) \leq \frac{1}{a}(-b); \text{ pues } \frac{1}{a} < 0 \\ &\Rightarrow x \leq -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Gráficamente:

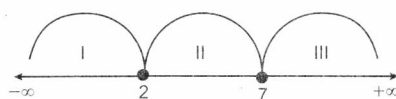


Luego: $CS = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq -\frac{b}{a}\right\} = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$

Criterio de los puntos críticos. Es utilizado para analizar la variación de los signos de los factores lineales (de coeficientes reales) en una multiplicación indicada.

Ejemplos:

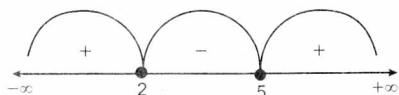
1. Sea $P(x) = (x - 2)(x - 7)$
 Las raíces del polinomio son: $2 \wedge 7$
 Ubiquemos esos valores en la recta real.



Las raíces del polinomio particionan la recta \mathbb{R} en 3 zonas (intervalos):

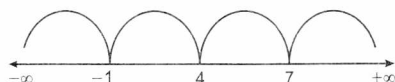
- $x \in \langle -\infty; 2 \rangle \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \wedge x - 7 < -5 < 0$, luego: $(x - 2)(x - 7) > 0$

- $x \in \langle 2; 7 \rangle \Rightarrow 2 < x < 7 \Rightarrow 0 < x - 2 < 5 \wedge -5 < x - 7 < 0$, luego: $(x - 2)(x - 7) < 0$
 - $x \in \langle 7; +\infty \rangle \Rightarrow x > 7 \Rightarrow x - 2 > 5 \wedge x - 7 > 0$, luego: $(x - 2)(x - 7) > 0$
- Gráficamente: $P(x) = (x - 2)(x - 7)$



2. Sea $P(x) = (x - 4)(x + 1)(x - 7)$, las raíces son: $-1, 4, 7$.

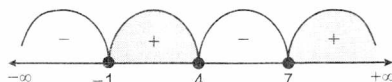
Ubiquemos estos valores en la recta real.



Las raíces del polinomio particionan a la recta \mathbb{R} en 4 zonas (intervalos)

Analicemos las variaciones.

Factor \ Zona	$x - 4$	$x + 1$	$x - 7$	$P(x)$
$x < -1$	-	-	-	-
$-1 < x < 4$	-	+	-	+
$4 < x < 7$	+	+	-	-
$x > 7$	+	+	+	+

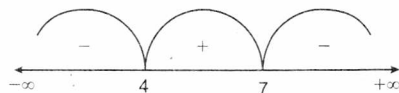


Si se tratará de resolver: $P(x) > 0$, tendríamos que: el CS = $\langle -1; 4 \rangle \cup \langle 7; +\infty \rangle$

Cuando formamos la inecuación polinomial los valores de las raíces del polinomio toman el nombre de puntos críticos.

3. Sea $P(x) = (7 - x)(x - 4)$

Las raíces son: 4 y 7 pero las variaciones de signo cambian.



INECUACIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas inecuaciones de la forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$$

siendo: $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

Resolución:

Como ($a \neq 0$) dividimos a ambos miembros entre a , teniendo cuidado el posible cambio en el sentido de la inecuación, entonces tenemos:

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \geq 0$$

Completando cuadrados dentro del paréntesis.

$$a \left(x^2 + 2x \left(\frac{b}{2a} \right) + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \geq 0$$

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right) \geq 0 \dots (a)$$

Pero recuerde que $b^2 - 4ac$ es el ¡Discriminante!, denotado por $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vamos a reemplazar en (a) y tendremos:

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \geq 0 \dots (I)$$

Comenzaremos con el análisis de los casos posibles que dependen del discriminante.

Caso I. Si $\Delta = 0$ reemplazando en (I), nos queda:

$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ cancelo a cuidándose de la variación de signo.

En este caso tenemos por ejemplo:

- $(x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{R}$, pues $\forall x \in \mathbb{R}$, cumple al ser reemplazada en la inecuación.
- $x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0$, notamos que se verifica $x \in \mathbb{R}$, excepto cuando $x = 2$.
 $\therefore \text{CS} = \mathbb{R} - \{2\}$
- $x^2 - 6x + 9 < 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 < 0$, obviamente la inecuación tiene el símbolo que hace que esta inecuación sea no verificable para algún valor real. $\text{CS} = \emptyset$
- $(x - 7)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 7)^2 = 0$, entonces tenemos que la única solución es $x = 7$.
 $\therefore \text{CS} = \{7\}$

Caso II. Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, reemplazando en (I), tenemos luego de elevar al cuadrado y tomar raíz.

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta^2}}{4a^2} \right) \geq 0$$

Vamos a multiplicar por el inverso multiplicativo de a y aprovechando la diferencia de cuadrados, quedará:

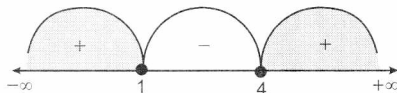
$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \geq 0$$

y para resolverlo aplicaremos el método de ¡Puntos críticos!, vamos a verlo mejor en algunos ejemplos:

Ejemplos:

1. Sea $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, factorizando por aspa simple, se tiene $(x - 4)(x - 1) \geq 0$. Los puntos críticos serán: 1; 4 (que son valores que anulan cada factor).

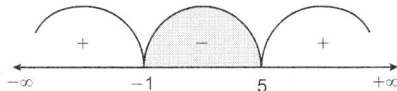
Reemplazamos en la recta numérica.



Empezamos de derecha a izquierda con el signo +, pues los coeficientes de x son positivos, además tomamos la parte positiva, pues el símbolo en la inequación es \geq .

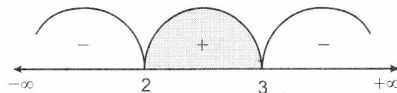
Luego $CS = \langle -\infty; 1 \rangle \cup [4; +\infty)$

2. Sea $x^2 - 4x - 5 < 0$, factorizando queda: $(x - 5)(x + 1) < 0 \Rightarrow$ Puntos críticos: 5; -1

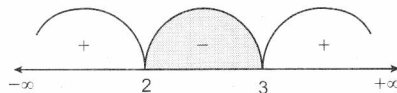


$\therefore CS = \langle -1; 5 \rangle$

3. Sea $(x - 2)(3 - x) \geq 0$ entonces los puntos críticos son: 3, 2. Cuando reemplazo en la recta no empezare la variación con (+), sino con (-), ¿por qué?

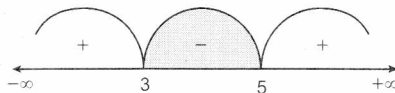


Note que es posible multiplicar por (-1) a ambos miembros y nos quedará $(x - 2)(x - 3) \leq 0$, ahora tenemos en la recta.



$\therefore CS = [2; 3]$

4. Sea $(3 - x)(5 - x) < 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) < 0$



$\therefore CS = \langle 3; 5 \rangle$

En lo posible, usted, ha visto las variables, ahora analicemos que pasa cuando $\Delta < 0$.

En el teorema siguiente:

Teorema (trinomio positivo). Sea:

$P(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

Se cumple que: $P(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta < 0$

Demostración:

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

Tenemos que $a > 0$ y en el binomio:

$$\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{+ \text{ o cero}} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{(-)}$$

El signo menos con el signo del discriminante se hará todo positivo y suma de positivos harán que $P(x)$ sea siempre positivo, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

1. $x^2 + 2x + 3 > 0 \Rightarrow$ Su $CS = \mathbb{R}$, pues $\Delta = 2^2 - 4(3) = -8 < 0$, y su coeficiente principal es positivo.
2. $x^2 + 4x + 7 < 0 \Rightarrow$ Su $CS = \emptyset$, pues $\Delta = 4^2 - 4(7) < 0$ y su coeficiente principal es positivo $\Rightarrow 0 < x^2 + 4x + 7 < 0 \Rightarrow 0 < 0$ ¡Absurdo!
 $CS = \emptyset$

Otra forma: $x^2 + 4x + 7 = x^2 + 4x + 4 + 3 < 0$
 $(x + 2)^2 + 3 < 0 \Rightarrow CS = \emptyset$

Un teorema análogo será el siguiente:

$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$

$\Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta \leq 0$

Teorema (trinomio negativo). Sea:

$P(x) = ax^2 + bx + c$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Se cumple que: $P(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a < 0 \wedge \Delta < 0$

Notemos que el producto:

$$(a < 0) \wedge \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \quad \therefore P(x) < 0$$

Inecuación polinomial de grado superior. Que tal si consideramos el polinomio de grado n :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \geq 0 \text{ donde } a_n \neq 0, \text{ además cada } a_i \in \mathbb{R}; i = \{0; 1; 2; 3; \dots; n\}$$

Como nosotros recordamos por un corolario del Teorema Fundamental del Álgebra, se tienen n raíces las que llamamos $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$.

Bien, si es que todas son reales, podemos factorizar:

$$a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \geq 0$$

Entonces para resolverla le aplicaremos el método de puntos críticos. Pero en general previamente ¡simplificar, algunos factores de los que ya conocemos el signo! Para ello notemos que:

Teorema. Sean: $x, a \in \mathbb{R}$

1. Si: $(x - a)^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x - a) \geq 0; n \in \mathbb{N}$
2. Si: $(x - a)^{2n+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x - a) \leq 0; n \in \mathbb{N}$

Prueba. Si:

$$(x - a)^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x - a)^{2n}(x - a) \geq 0$$

$$\text{Pero } (x - a)^{2n} \geq 0 \Rightarrow x - a \geq 0$$

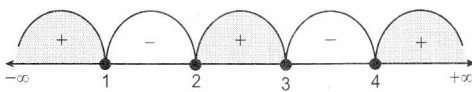
$$\text{Si: } (x - a) \geq 0 \text{ multiplicando por } (x - a)^{2n} \geq 0$$

$$\Rightarrow (x - a)^{2n+1} \geq 0$$

Por ejemplo podemos resolver:

$$1. (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) \geq 0$$

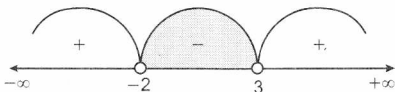
Los puntos críticos son; 1; 2; 3; 4.



de lo cual $CS = \langle -\infty; 1 \rangle \cup [2; 3] \cup [4; +\infty)$

$$2. (x - 1)^2(x - 3)(x + 2)(x - 7)^4 < 0. \text{ Simplificando } (x - 3)(x + 2) < 0$$

Los puntos críticos son: -2; 3.



Notemos que el $CS = \langle -2; 3 \rangle$, pero ¡cuidado! el factor $(x - 1)^2$, cancelado, tiene a $x = 1$, que

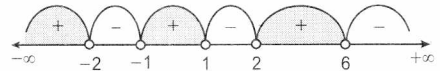
es un valor que anula el factor y que reemplazando en la inecuación original tendríamos el absurdo ($0 < 0$), esto quiere decir que $x = 1$ es un valor no solución.

$$\therefore CS = \langle -2; 3 \rangle - \{1\}$$

Lo mismo pasa con $x = 7$, pero como no está en el CS no le afecta.

$$3. (x^2 - 4)(1 - x)(x^2 + x + 1)^{27}(x^2 - 5x - 6) > 0$$

Simplificando $(x^2 + x + 1)^{27}$, pues $x^2 + x + 1$ es positivo, nos quedaría $(x^2 - 4)(1 - x)(x^2 - 5x - 6) > 0$, pero podemos factorizar y nos queda: $(x + 2)(x - 2)(1 - x)(x - 6)(x + 1) > 0$



$$\text{Luego el } CS = \langle -\infty; -2 \rangle \cup \langle -1; 1 \rangle \cup \langle 2; 6 \rangle$$

Antes de estudiar la inecuación fraccionaria e irracional, veamos un concepto previo:

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (CVA)

Es aquel conjunto formado por todos los valores que garantizan que una expresión matemática quede bien definida; así se tiene los siguientes casos:

Expresiones polinomiales

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-1} + \dots + a_n; a_0 \neq 0; n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow CVA = \mathbb{C} = \{x + yi / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$$

Expresiones fraccionarias. Como la división por cero no está definida, entonces el denominador no puede ser cero.

$$\text{Así: } f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow CVA = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$$

Expresiones irracionales. Estas expresiones están definidas sobre los reales \mathbb{R} , de modo que:

$$\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$$

- a. Cuando n es par $\wedge n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2 \wedge f(x) \geq 0$
- b. Cuando n es impar $\wedge n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 3 \wedge f(x) \in \langle -\infty; +\infty \rangle$

INECUACIÓN FRACCIONARIA

Son aquellas inecuaciones que se reducen a la siguiente forma general:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0; {}^0[Q(x)] \geq 1$$

donde P y Q son polinomios.

${}^0[Q(x)]$: Grado de Q(x)

Resolución:

Como $Q(x) \neq 0 \Rightarrow Q^2(x) > 0$

Multiplicando a ambos lados de la inecuación si-

guiente: $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ por $Q^2(x)$ se tiene:

$$Q^2(x) \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) > Q^2(x)(0)$$

Con lo cual el sentido de la desigualdad no se altera.

Luego, simplificando se tiene: $Q(x)P(x) > 0$. Esto último sería inecuación polinomial, siempre que $Q(x) \neq 0$.

En resumen una inecuación fraccionaria de la for-

ma: $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ con $Q(x) \neq 0$

Será equivalente a una inecuación polinomial:

$Q(x)P(x) \geq 0$; con $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo:

Resuelva: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5} \leq 0$

Resolución:

Factorizando el numerador y denominador se tie-

ne: $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-1)} \leq 0$

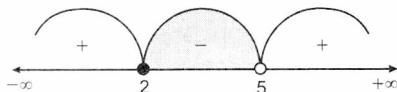
Los valores admisibles serán todos los $x \in \mathbb{R}$, excepto 5 y 1. Es decir: CVA = $\mathbb{R} - \{5; 1\}$

Procedemos a simplificar: $\frac{x-2}{x-5} \leq 0$

Ahora transformamos a una polinomial ubicando el denominador en forma práctica al lado del numerador, de modo que este multiplicando:

$$(x-5)(x-2) \leq 0$$

Esta inecuación se resuelve en base al método de los intervalos para una inecuación cuadrática:



$$\therefore CS = [2; 5)$$

Notar que en 5 es abierto por el CVA.

ECUACIÓN IRRACIONAL

Son aquellas ecuaciones de la forma: $P(x) = 0$

donde P es una expresión irracional.

Resolución:

Primeramente se determina el CVA, luego la ecuación original se reduce a otra equivalente más simple y la solución o soluciones de esta última ecuación se analizan si está o no considerado en el CVA.

INECUACIÓN IRRACIONAL

Es aquella inecuación que se reduce a la siguiente

forma general: $P(x) \geq 0$ donde P es una expresión irracional.

Resolución:

- Halle el CVA de P
- Mediante pasos equivalentes reducir la ecuación original y obtener un conjunto solución al cual le podemos llamar solución particular (Sp).
- Para hallar el conjunto solución final interceptar el CVA con la solución particular (Sp); es decir: $CS = Sp \cap CVA$

Para la resolución de inecuaciones donde intervengan raíces cuadradas podemos aplicar los siguientes teoremas:

Teoremas. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

- $\sqrt{a} < b \Leftrightarrow 0 \leq a \wedge 0 < b \wedge a < b^2$
- $\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow 0 \leq a \wedge 0 \leq b \wedge a \leq b^2$
- $b < \sqrt{a} \Leftrightarrow (0 \leq a \wedge b < 0) \vee (0 \leq a \wedge 0 < b \wedge b^2 < a)$
- $b \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow (0 \leq a \wedge b \leq 0) \vee (0 \leq a \wedge 0 \leq b \wedge b^2 \leq a)$

Además podemos aplicar la siguiente propiedad: cuando una expresión $\sqrt[n]{f(x)}$ se encuentran multiplicando a otras expresiones matemáticas en un solo miembro y se tiene cero en el otro miembro, entonces:

- Si n es par, se simplifica toda la expresión por ser positiva.

- Si n es impar, se reemplaza $\sqrt[n]{f(x)}$ por el radicando $f(x)$; es decir se elimina el símbolo radical.

Ejemplo:

$$\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) \geq 0$$

Resolución:

- a) CVA: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow \text{CVA} = [2; +\infty)$
- b) $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \in \langle -\infty; 1 \rangle \cup [2; +\infty) = \text{Sp}$
 $\therefore \text{CS} = \text{Sp} \cap \text{CVA} = [2; +\infty)$

Ejemplo:

$$\text{Resuelva: } \sqrt[3]{x-1} \sqrt[5]{x-2} \leq 0$$

Resolución:

Eliminamos los radicales por ser de índice impar, así: $(x-1)(x-2) \leq 0 \therefore \text{CS} = [1; 2]$

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x , se define como aquel número real no negativo que se denota por $|x|$: donde:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{si } x \text{ es positivo o cero} \\ -x; & \text{si } x \text{ es negativo} \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|5| = 5$; solo se borran las barras, pues 5 es positivo.
- $|-3| = -(-3) = 3$; al borrar las barras se cambia de signo, de -3 a 3 , pues -3 es negativo.

Observación:

Sea $x = \mu - a$, reemplazando en la definición, se tiene:

$$|\mu - a| = \begin{cases} \mu - a; & \text{si } (\mu - a) \text{ es positivo o cero} \\ -(\mu - a); & \text{si } (\mu - a) \text{ es negativo} \end{cases}$$

Entonces:

$$|\mu - a| = \begin{cases} \mu - a; & \mu \text{ es mayor que } a \\ a - \mu; & \mu \text{ es menor que } a \end{cases}$$

Ejemplo:

- $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$; pues $\sqrt{2}$ es mayor que 1
- $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$; pues 1 es menor que $\sqrt{3}$

Es decir, el resultado de aplicar valor absoluto a una expresión matemática nos dará como resultado siempre una expresión positiva.

En tal sentido, enunciaremos las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
 2. $|x|^2 = x^2$; $\forall x \in \mathbb{R}$
 3. $|x| \geq x$; $\forall x \in \mathbb{R}$
 4. $|-x| = |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$
 5. $\sqrt{x^2} = |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- Además, si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:
6. $|xy| = |x||y|$
 7. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$
 8. $|x + y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}$
 9. $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$
 10. $|x + y| < |x| + |y| \Leftrightarrow xy < 0$

Ecuaciones con valor absoluto. Son ecuaciones que se reducen a la siguiente forma general:

$$|A(x)| = 0$$

donde A es una expresión con valor absoluto.

Se pueden usar los siguientes teoremas:

1. $|x| = a \Leftrightarrow (x = a \vee x = -a) \wedge a \geq 0$
2. $|x| = |b| \Leftrightarrow x = b \vee x = -b$

Inecuaciones con valor absoluto. Son aquellas inecuaciones que se reducen a la siguiente forma general: $|A(x)| \geq 0$

Donde A es una expresión con valor absoluto.

Aquí tener en cuenta los siguientes teoremas:

1. $|x| < b \Leftrightarrow b > 0 \wedge -b < x < b$
2. $|x| \leq b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge -b \leq x \leq b$
3. $|x| > b \Leftrightarrow x > b \vee x < -b$
4. $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \vee x \leq -b$

Ejemplos:

Resuelva:

1. $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5 \Leftrightarrow \text{CS} = \langle -5; 5 \rangle$
2. $|x| > 7 \Leftrightarrow x > 7 \vee x < -7$
 $\Leftrightarrow \text{CS} = \langle -\infty; -7 \rangle \cup \langle 7; +\infty \rangle$
3. $|x + 3| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x + 3 \leq 9$
 $\Leftrightarrow -12 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow \text{CS} = [-12; 6]$
4. $|x - 2| \geq 5 \Leftrightarrow x - 2 \geq 5 \vee x - 2 \leq -5$

$$\Leftrightarrow x \geq 7 \vee x \leq -3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 7 \vee x \leq -3$$

$$CS = \langle -\infty; -3 \rangle \cup [7; +\infty)$$

Para eliminar un valor absoluto generalmente este debe elevarse al cuadrado, así tenemos el siguiente teorema: $|x| \geq |y| \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sixes múltiplo de 17 que satisfacen las siguientes

$$\text{desigualdades: } 0 < \frac{5(x^2 - 115x - 600)}{x(x+5)} < 1$$

Hallar el valor de x .

Resolución:

Representando convenientemente:

$$0 < \frac{5(x-120)(x+5)}{x(x+5)} < 1$$

Simplificando y teniendo presente que x es múltiplo de 17 positivo:

$$\frac{5(x-120)}{x} > 0 \Rightarrow x > 120$$

$$\frac{5(x-120)}{x} < 1 \Rightarrow x < 150$$

Entonces un múltiplo de 17 en el intervalo:

$$120 < x < 150 \text{ será: } \therefore x = 136$$

2. Hallar la solución de la inecuación:

$$-x^2 + 8x - 7 > 0$$

Resolución:

$$\text{Se tiene: } -x^2 + 8x - 7 > 0$$

Multiplicando la desigualdad por -1 :

$$x^2 - 8x + 7 < 0 \wedge (x-7)(x-1) < 0$$

Posibilidades:

$$\bullet \quad x-7 > 0 \wedge x-1 < 0$$

$$\quad \quad \quad x > 7 \quad x < 1$$

$$\bullet \quad x-7 < 0 \wedge x-1 > 0$$

$$\quad \quad \quad x < 7 \quad x > 1$$

Solucionando la inecuación: $x < 7$; $x > 1$

$$CS = \langle 1; 7 \rangle$$

3. Resolver la inecuación: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 3$

Resolución:

$$\text{Efectuando: } \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} - 3 < 0$$

Dando común denominador y multiplicando

$$\text{por } -1: \frac{2x^2 + 9x + 16}{x^2 + 2x + 6} > 0 \quad \dots (\alpha)$$

Además: $x^2 + 2x + 6 = (x+1)^2 + 4$, entonces siempre es positivo.

$$\text{También: } 2x^2 + 9x + 16 = 2 \left[\left(x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} \right) + \frac{47}{16} \right]$$

$$(2x^2 + 9x + 16) = 2 \left(x + \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{47}{16}$$

entonces siempre es positivo.

$\therefore (\alpha)$ siempre se cumple para cualquier valor de x número real.

4. Hallar la solución de la desigualdad:

$$\frac{(4x+8)(x^2-1)}{x-1} < -1; \text{ donde: } x \neq 1$$

Resolución:

Expresando convenientemente:

$$\frac{(4x+8)(x+1)(x-1)}{(x-1)} + 1 < 0$$

$$\text{De donde: } (4x+8)(x+1) + 1 < 0$$

$$\text{Mejor aún: } 4x^2 + 12x + 9 < 0$$

$$\text{Que se puede escribir: } (2x+3)^2 < 0$$

Lo cual es absurdo ya que para todo número al cuadrado siempre será mayor o igual que cero.

5. Hallar los valores reales de x que satisfacen simultáneamente las desigualdades:

$$3x^2 + 2x > 0 \quad \text{y} \quad x^3 + x^2 + x < 0$$

Resolución:

Expresando convenientemente:

$$x(3x+2) > 0 \quad \dots (1)$$

$$x \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] < 0 \quad \dots (2)$$

De (1):

$$\bullet \quad x > 0 \wedge 3x+2 > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge x > -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x > 0$$

$$\bullet \quad x < 0 \wedge 3x+2 < 0; x < 0 \wedge x < -\frac{2}{3}$$

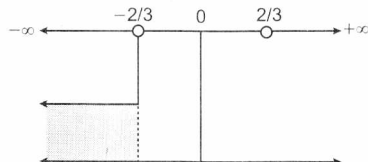
$$\Rightarrow x < -\frac{2}{3}$$

$$\text{De (2): } x \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] < 0$$

Siempre será positivo.

Entonces la solución única: $x < 0$

De (1) y (2): intersectando soluciones:



Solución del sistema: $x < -\frac{2}{3}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < \frac{x}{6} + 5$

Indique el mayor valor entero que la verifica.

- a) 0 b) 5 c) 3
d) 6 e) no existe

2. Resolver: $\frac{3x-4}{2} + \frac{5x-6}{4} \geq \frac{7x-8}{-2}$

Señale un valor que la verifica.

- a) -1 b) 2 c) -3
d) 0 e) 1

3. Resolver:

$$a(x+b) + b(x-a) \geq a^2 - b^2; a < b < 0$$

Señalando el mayor valor que puede tener x ,

- a) $-a + b$ b) b c) a
d) 2 e) $a - b$

4. Resolver:

$$a(x-b) - b(x-a) \leq a^2 - b^2; a < b$$

Señalando el menor valor que puede tener x .

- a) a b) $a + b$ c) $-a - b$
d) b e) $-b$

5. Resolver: $0 < a < b$

$$\frac{2bx}{a^2 - b^2} + \left(\frac{a+b}{x} \right)^{-1} < \left(\frac{a-b}{5} \right)^{-1}$$

a) $x \in \langle 5; +\infty \rangle$

b) $x \in \langle -\infty; 5 \rangle$

c) $x \in [-5; +\infty)$

d) $x \in \langle -\infty; -5 \rangle$

e) N. A.

6. Resolver: $\frac{3ax}{a^2-1} - \frac{4}{a+1} < \left(\frac{a^2-1}{5} \right)^{-1} - \frac{x}{a-1}; a > 1$

Señale su conjunto solución.

a) $\langle 1; +\infty \rangle$

b) $x \in \emptyset$

c) $\mathbb{R} - [1; +\infty)$

d) $\langle -\infty; 1]$

e) N. A.

7. Resolver: $2x - 8 + \frac{6}{x-3} \leq 7 - x + \frac{6}{x-3}$

a) $x \in \langle -\infty; 5]$

b) $x \in \langle 5; +\infty \rangle$

c) $x \in \langle 9; 10 \rangle$

d) $x \in \langle -\infty; 5] - \{3\}$

e) $x \in \langle 3; 5 \rangle$

8. Resolver: $x - 8 + \frac{12}{x-6} \geq 10 - x + \frac{12}{x-6}$

a) $x \in [6; 9)$

b) $x \in [9; +\infty)$

c) $x \in [9; 9]$

d) $x \in [-9; +\infty) - \{6\}$

e) N. A.

9. Resolver: $x^2 - 10x + 16 > 0$

a) $x \in \langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle 8; +\infty \rangle$

b) $x \in \langle 2; 8 \rangle$

c) $x \in \mathbb{R}$

d) $x \in \langle -2; -8 \rangle$

e) N. A.

10. Resolver: $2x^2 + 5x - 12 < 0$

a) $x \in \langle -4; 3/2 \rangle$

b) $x \in \langle -\infty; -3/2 \rangle \cup \langle 4; +\infty \rangle$

c) $x \in \langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 3/2; +\infty \rangle$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) N. A.

11. Resolver: $x^2 - 14x < -49$

a) $x \in \langle 7; +\infty \rangle$

b) $x \in \langle -7; +\infty \rangle$

c) $x \in \langle -\infty; 7 \rangle$

d) $x \in \langle -\infty; -7 \rangle$

e) $x \in \emptyset$

12. Resolver: $x^2 - 20x \leq -(25 + 3x^2)$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $x \in \mathbb{R} - \{5/2\}$

c) $x \in \emptyset$

d) $x \in \{5/2\}$

e) $x \in \mathbb{R} - \{2/5\}$

13. Resolver: $x^2 + x \leq 1 - x$

a) $x \in [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}]$

b) $x \in \langle -\infty; -1 - \sqrt{2} \rangle \cup [-1 + \sqrt{2}; +\infty \rangle$

c) $x \in \mathbb{R} - [-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}]$

d) $x \in \mathbb{R} - \langle -1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

e) Hay 2 correctas

14. Resolver: $x^2 - 5x + 1 \leq 0$

a) $x \in \langle -5 - \sqrt{21}; -5 + \sqrt{21} \rangle$

b) $x \in \mathbb{R}$ c) $x \in \left[\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right]$

d) $x \in \emptyset$ e) N. A.

15. Resolver: $3x^2 + x + 8 \geq 0$

a) $x \in \langle 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2} \rangle$

b) $x \in \mathbb{R}$

c) $x \in \emptyset$

d) $x \in \mathbb{R} - \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

e) $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

16. Resolver: $5x^2 - 2x + 10 < 9$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $x \in \langle 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3} \rangle$

c) $x \in \mathbb{R} - \langle 1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3} \rangle$

d) $x \in \emptyset$

e) N. A.

17. Resolver: $(x - 1)^2 - x^2 \geq -(x - 2)^2$ dar el conjunto no solución.

a) $x \in [1; 5]$

b) $x \in [5; +\infty \rangle$

c) $x \in \langle -\infty; 1]$

d) $x \in \langle -\infty; 5]$

e) $x \in \langle 1, 5 \rangle$

18. Resolver: $(x + 21)^2 + (x + 22)^2 \geq (x + 23)^2$ dar como respuesta el menor valor entero que no verifica la inecuación.

a) -21

b) -22

c) -23

d) -24

e) N. A.

19. Resolver: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 5} < 3$

a) $x \in \langle 2; +\infty \rangle$

b) $x \in \langle -3; 3 \rangle$

c) $x \in \langle -3; +\infty \rangle$

d) $x \in \mathbb{R}$

e) N. A.

20. Resolver: $|x + 1| \geq 2$ señalar el menor valor entero positivo que verifica la inecuación.

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

21. Resolver: $|2x + 3| \geq 7$, determinar el número de valores enteros que no verifican la inecuación.

a) 1

b) 2

c) 4

d) 5

e) 6

22. Resolver: $|2x + 5| \leq 3$; indicar la suma de las soluciones enteras.

a) -1

b) -3

c) -6

d) -10

e) -12

23. Resolver: $|3x + 4| < 5$ señalar la menor solución entera.

a) -5

b) -4

c) -3

d) -2

e) -1

CLAVES

1. b	6. c	11. e	16. d	21. e
2. b	7. d	12. d	17. e	22. d
3. e	8. b	13. a	18. a	23. d
4. b	9. a	14. c	19. d	
5. a	10. a	15. b	20. b	

PROGRESIONES

PROGRESIÓN ARITMÉTICA (PA)

Es una sucesión de números, en la cual cada uno de ellos se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante llamada razón.

Símbolos:

t_1 : primer término

t_n : término de lugar n o n -ésimo término

r : razón

n : número de términos

S_n : suma de n primeros términos.

Representación de una progresión aritmética:

$$\div t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n$$

Por definición: $t_n = t_{n-1} + r$

De donde: $r = t_n - t_{n-1}$

La progresión aritmética es **creciente** cuando la **razón es positiva** y es **decreciente** cuando la **razón es negativa**.

PROPIEDADES

- Valor de un término cualquiera:

$$t_n = t_1 + (n-1)r$$

- En una PA la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Sea la PA: $\div t_1 \dots t_p \dots t_q \dots t_n$

Siendo t_p y t_q equidistantes de los extremos:

$$t_1 + t_n = t_p + t_q$$

- En una PA de un número impar de términos el término central es igual a la semisuma de los

extremos: $t_{\text{central}} = \frac{t_1 + t_n}{2}$

- En una PA de tres términos, el segundo término es media aritmética entre los otros dos.

Sea la PA: $\div t_1, t_2, t_3$

$$t_2 = \frac{t_1 + t_3}{2}$$

- La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los extremos, multiplicada por el número de términos. Es decir:

$$S_n = (t_1 + t_n) \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = [2t_1 + (n-1)r] \frac{n}{2}$$

Medios aritméticos o diferenciales: son los términos de una PA, comprendidos entre sus extremos: $\div t_1, \dots, t_n$

m medios aritméticos

Interpolación de medios aritméticos: es la operación que consiste en formar una PA conociendo los extremos y el número de medios a interpolar.

Sean los extremos a y b y m el número de medios.

La razón de interpolación es:

$$r_i = \frac{b-a}{m+1}$$

Ejemplos:

- En una PA se conoce: $t_3 + t_6 = 57 \dots (1)$

$$t_5 + t_{10} = 99 \dots (2)$$

hallar la razón y el primer término.

Resolución:

Por la fórmula: $t_n = t_1 + (n-1)r$:

$$\begin{array}{rcl} t_3 & = & t_1 + 2r \\ t_6 & = & t_1 + 5r \\ \hline t_3 + t_6 & = & 2t_1 + 7r = 57 \quad \dots (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} t_5 & = & t_1 + 4r \\ t_{10} & = & t_1 + 9r \\ \hline t_5 + t_{10} & = & 2t_1 + 13r = 99 \quad \dots (2) \end{array}$$

$$\text{Restando } (2) - (1): 6r = 42; r = 7$$

$$\text{En } (1): 2t_1 + 7 \times 7 = 57; 2t_1 = 8; t_1 = 4$$

$$\therefore r = 7, t_1 = 4$$

- En la PA: $\div \dots, 5, \dots, 47, \dots, 159$, el número de términos que hay entre 47 y 159 es triple del número de términos que hay entre 5 y 47. Hallar la razón de esta progresión.

Resolución:

Considerando la PA de razón r :

Por dato: $\div 5, \underbrace{\dots}_n 47, \underbrace{\dots}_{3n} 159$

De intervalo con extremos 5 y 47

$$r = \frac{47-5}{n+1} = \frac{42}{n+1} \quad \dots (I)$$

Del intervalo con extremos 47 y 159:

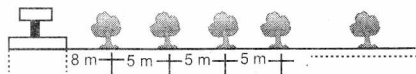
$$r = \frac{159 - 47}{3n + 1} = \frac{112}{3n + 1} \quad \dots (II)$$

como se trata de la misma P.A. (I) y (II) son iguales, entonces: $\frac{42}{n + 1} = \frac{112}{3n + 1}$; de donde:

$$n = 5; \text{ sust. en (I): } r = \frac{42}{5 + 1} = 7 \quad \therefore r = 7$$

3. El guardián de un pozo de una hacienda ha plantado a partir del pozo, cada 5 metros y en la dirección norte, un total de 27 árboles y puede sacar agua del pozo cada vez para el riego de un solo árbol. ¿Cuánto tiene que andar para regar los 27 árboles, sabiendo que de pozo al primer árbol hay 8 m de distancia?

Resolución:



1. El espacio que recorre para llevar agua al primer árbol y regresar al pozo es: $8 + 8 = 16$ m.
2. El espacio que recorre para llevar agua al segundo árbol y regresar al pozo es: $13 + 13 = 26$ m.
3. Para el tercer árbol: $26 + 10 = 36$ m.

Así, sucesivamente.

La distancia total recorrida es:

$$S = 16 + 26 + 36 + \dots$$

Como la suma es de 27 sumandos:

$$S_{27} = (2t_1 + 26r) 27/2; \text{ sust. datos:}$$

$$S_{27} = (2 \times 16 + 26 \times 10) 27/2; \text{ efectuando:}$$

$$S_{27} = 3942 \text{ m.}$$

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (PG)

Es una sucesión de números en la cual el primer término es distinto de cero y cada uno de los términos siguientes se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constante, llamada razón de la PG.

Símbolos:

t_1 : primer término

t_n : término de lugar n o término enésimo

q : razón

n : número de términos

S_n : suma de n términos.

P_n : producto de n términos

Representación de una progresión geométrica:

$$\div t_1 : t_2 : t_3 : \dots : t_{n-1} : t_n$$

Por definición: $t_n = t_{n-1}q \quad \therefore \quad q = \frac{t_n}{t_{n-1}}$

Nota:

La razón de una PG se halla dividiendo dos términos consecutivos.

PROPIEDADES

1. Un término cualquiera: $t_n = t_1 q^{n-1} \quad (1)$
2. La razón de un PG el producto de dos términos equidistantes de los extremos es igual a producto de los extremos.
Sea la PG:
 $\div t_1 : t_2 : \dots : t_p : \dots : t_q : \dots : t_{n-1} : t_n$
donde t_p y t_q son equidistantes de los extremos

$$t_p t_q = t_1 t_n$$

3. En una PG de un número impar de términos el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

$$t_{\text{central}} = \sqrt{t_1 t_n}$$

4. En una PG de tres términos, el segundo término es media geométrica entre el primero y el tercero. Sea: $\div t_1 : t_2 : t_3$

$$t_2 = \sqrt{t_1 t_3}$$

5. En una PG limitada de n términos, el producto de sus términos es igual a la raíz cuadrada del producto de sus extremos, elevado al número de términos de la PG.

$$P_n = \sqrt{(t_1 t_n)^n}$$

6. La suma de los n primeros términos de una PG limitada, es:

$$S_n = \frac{q t_n - t_1}{q - 1} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2), se obtiene otra fórmula:

$$S_n = \frac{t_1 q^{n-1} q - t_1}{q - 1}; \text{ de donde:}$$

$$S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

7. El límite de la suma de los términos de una PG decreciente ilimitada es igual al primer término dividido entre la diferencia de la unidad y

la razón:
$$S_L = \frac{t_1}{1 - q}$$

para una PG decreciente: $0 < q < 1$ cuando $n \rightarrow \infty$ (se lee: n tiende a infinito).

Medios geométricos o proporcionales: son los términos de una PG comprendidos entre sus extremos:

$$\div t_1 \underbrace{\dots}_{m \text{ medios geométricos}} t_n$$

Interpolación medios geométricos entre dos números dados. Es formar una PG entre dichos números. Sean los números a y b y el número de medios m , la progresión geométrica será. $\div a : \underbrace{\dots}_m : b$

La razón de interpolación es:

$$q_i = \frac{m+1}{m} \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$$

Ejemplos:

1. Hallar el término de lugar 16 en la PG:

$$\div \frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \dots$$

Resolución:

$$\text{Datos: } t_1 = \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8}; n = 16; q = 2$$

$$\text{Aplicando la fórmula: } t_n = t_1 q^{n-1}$$

$$\text{Se tiene: } t_{16} = \left(\frac{1}{2^8} \right) (2)^{16-1} = \left(\frac{1}{2^8} \right) 2^{15} = 2^7$$

$$\therefore t_{16} = 128$$

2. En una PG se conoce que: $t_1 = 1/2$, $t_3 = 1$ y $t_n = 256$, hallar la razón y el número de términos.

Resolución:

$$\text{Por fórmula: } t_3 = t_1 q^2$$

$$\text{Sust. datos: } 1 = \frac{1}{2} q^2 \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

Por la fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1}$; sustituyendo:

$$256 = \left(\frac{1}{2} \right) (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$512 = (\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow 2^9 = (2)^{\frac{n-1}{2}}; \text{ de donde:}$$

$$9 = \frac{n-1}{2} \Rightarrow 18 = n-1 \therefore n = 19$$

3. En una PG el primer término es 7, el último es 448 y la suma 889. Hallar la razón y el número de términos.

Resolución:

Por la fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1}$; sustituyendo datos:

$$448 = 7 q^{n-1} \Rightarrow 64 = q^{n-1}; \text{ de donde:}$$

$$q^n = 64q \quad \dots (1)$$

$$\text{Por la fórmula: } S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$\text{Sust. datos: } 889 = 7 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

$$127 = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \dots (2)$$

$$\text{Sustituyendo (1) en (2): } 127 = \frac{64q - 1}{q - 1}; \text{ de}$$

$$\text{donde: } q = 2$$

Sustituyendo en (1):

$$2^n = 64 \times 2 = 128 = 2^7 \therefore n = 7$$

4. El límite de la suma de los infinitos términos de una PG decreciente es el doble de la suma de sus n primeros términos. Hallar la razón.

Resolución:

El límite de la suma de los términos de la PG

$$\text{infinita es: } \lim S = \frac{t_1}{1 - q} \quad \dots (1)$$

siendo la suma de los n primeros términos:

$$S_n = \frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad \dots (2)$$

Por condición del problema: $2S_n = \lim S$

Sustituyendo (1) y (2) en esta condición del

problema: $2t_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{t_1}{1 - q}$; simplificando:

$$2(1 - q^n) = 1 \Rightarrow 1 - q^n = \frac{1}{2}$$

$$-q^n = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow q^n = \frac{1}{2}; \text{ de donde: } q = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si a los números 3; 7 y 13 se les suma una misma cantidad resulta, en ese orden, una progresión geométrica. Determinar la razón de dicha progresión.

- a) 0,6 b) 1,2 c) 1,5
d) 2,5 e) 3

2. Mostrar los cuatro medios geométricos interpolados entre 160 y 5.

- a) 5; 10; 20; 40 b) 10; 30; 60; 90
c) 80; 40; 20; 10 d) 120; 90; 60; 30
e) 10; 30; 90; 120

3. Según:

$$\div (x - 3) : x : (x + 12)$$

$$\div y: \sqrt{x}: (y + 3)$$

$\div 2y : 2x : z$: calcular z

- a) 12 b) 16 c) 20
d) 24 e) 32

4. Los términos de lugares 2a y 2b de una progresión geométrica son, respectivamente, m^2 y n^2 . ¿Cuál es el término de lugar $a + b$?

- a) mn b) $(mn)^2$ c) $mn/2$
d) $(m + n)^2$ e) $m^2 + n^2$

5. De una P.A se tiene:

$$S_n - a_n = (n - 1)(n + 3); \text{ donde:}$$

a_n : término general

S_n : suma de los n primeros términos

Si n es impar, proporcionar el término central.

- a) $n + 1$ b) $n + 2$ c) $n + 3$
d) $n + 4$ e) $n + 5$

6. En la progresión: $\div a, b, c, d$ la suma de sus términos es n y la razón es $2n$. Hallar: $a^2 - d^2$

- a) n^2 b) $-3n^2$ c) $6n^2$
d) $-4n^2$ e) $12n^2$

7. Dada la progresión aritmética:

$$\div \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \text{ obtener: } \frac{a^2}{b^2+c^2}$$

- a) 2 b) 4 c) 1
d) $1/2$ e) $1/4$

8. El término en la posición 17 de: $\div 8 : 32 : 128 : \dots$ es igual a 2^k . Señalar el valor de k.

- a) 41 b) 39 c) 38
d) 35 e) 32

9. Las edades de un padre y sus dos hijos están en progresión geométrica; el producto de todas las edades es 1331. Indicar la edad del hijo mayor.

- a) 7 b) 9 c) 11
d) 13 e) 14

10. Indicar el menor de 4 números en P.G. sabiendo que la suma de sus extremos es 140 y la suma de los términos centrales es 60.

- a) 4 b) 5 c) 10
d) 15 e) 45

11. En una progresión aritmética se conoce que:
 $a_7 = 10$ y $a_{10} = 7$. Calcular el término a_{15}

- a) 3 b) 2 c) -2
d) -3 e) 0

12. Hallar la suma: $S = 7 + 13 + 19 + 25 + \dots + (6n + 1)$

- a) $n^2 + 2n$ b) $2n^2 + 3n$ c) $3n^2 + 4n$
d) $2n^2 - 3n$ e) $3n^2 - 4n$

13. De una progresión aritmética se sabe que:

$$a_3 + a_5 = 57$$

$$a_5 + a_{10} = 99$$

¿A qué intervalo pertenece la razón?

- a) $[0; 6>$ b) $<0; 5]$ c) $<5; 7>$
d) $<6; 7]$ e) $<-1; 0>$

14. En una P.A la razón y el número de términos son iguales, la suma de los términos es 156 y la diferencia de los extremos es 30. Calcular el último término.
- a) 29 b) 35 c) 37
d) 39 e) 41
15. Proporcionar la suma de los 20 primeros términos de la siguiente progresión decreciente: $\div x^2, 2x, 3, \dots$
- a) -500 b) -420 c) -400
d) -390 e) -280
16. Se interpolan 5 medios aritméticos entre los números 4 y 22. Calcular la razón de interpolación
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
17. En la progresión: $\div 3, \dots, 30, \dots$, p el número de términos comprendidos entre 3 y 30 es igual al número de los comprendidos entre 30 y p. Calcular la razón si además la suma de todos los términos es 570.
- a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 2
18. Si: a; b; c; d están en progresión geométrica, además: $a - d = 7$, calcular:
- $$(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$$
- a) 91 b) 49 c) 34
d) 19 e) 14
19. Si al soltarse una pelotita desde 1 metro de altura, esta adquiere en cada rebote los $\frac{3}{4}$ de la altura anterior, calcular la distancia que recorre hasta que se detiene.
- a) 7 m b) 6 m c) 5 m
d) 4 m e) 3 m
20. Sumar:
- $$1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24}\right) + \dots$$
- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{3}$
d) 2 e) 3

CLAVES

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 1. c | 5. d | 9. c | 13. c | 17. d |
| 2. c | 6. b | 10. b | 14. e | 18. b |
| 3. e | 7. d | 11. b | 15. d | 19. d |
| 4. a | 8. d | 12. c | 16. b | 20. b |

LOGARITMOS

LOGARITMOS EN LOS REALES

Teorema de existencia y unicidad del logaritmo

Para todo par de números reales a y b tales que $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, existe un único número real x , que cumple: $a^x = b$.

Definición de logaritmo. Sean los números reales a y b , si $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, el número real x se denomina logaritmo del número b en base a y se denota por $\log_a b$ si y solo si $a^x = b$.

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$$

Donde: a : base del logaritmo
 b : número del logaritmo
 x : logaritmo de b en la base a

Ejemplos:

$$1. \quad 2 = \log_3 9 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

$$2. \quad 3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$3. \quad 10 = \log_{\sqrt{2}} 32 \Leftrightarrow \sqrt{2}^{10} = 32$$

Nota:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_{a^n} a = 1/n$
- $\log_{a^n} a^m = m/n$
- $\log_a a = 1$

Identidad fundamental del logaritmo

Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$ se cumple: $a^{\log_a b} = b$

$$\bullet \quad 3^{\log_3 5} = 5 \quad \bullet \quad (2x)^{\log_{2x} a} = a$$

Teoremas. Sea la base real a , tal que $a > 0$ y $a \neq 1$

1. Sean A y B reales, tal que: $AB > 0$

$$\log_a AB = \log_a |A| + \log_a |B|$$

2. Sean A y B reales, tal que: $A/B > 0$

$$\log_a (A/B) = \log_a |A| - \log_a |B|$$

3. Sean A real, $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n > 0$

$$\log_a A^n = n \log_a |A|$$

4. Sea A real, tal que $A > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

5. Sea A real, tal que $A > 0$, $m \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

$$\log_a A^m = \frac{m}{n} \log_a A; n \neq 0$$

Corolario. Si se eleva a un mismo exponente m (o se extrae raíz n -ésima) la base y número del logaritmo, el valor del logaritmo no se altera.

$$\log_a A = \log_{a^m} A^m = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{A}; A > 0$$

6. Si $A > 0$ y $B > 0$

$$\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B$$

7. Cambio de base: Dado $\log_a b \in \mathbb{R}$

$$\text{Sea: } c > 0 \wedge c \neq 1 \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

PROPIEDAD

$$\log_b a = (\log_a b)^{-1} = \frac{1}{\log_a b}; a \neq 1$$

Regla de la cadena. Si:

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$ y $d > 0$

Se cumple: $\log_a b \log_b c \log_c d = \log_a d$

SISTEMAS DE LOGARITMOS

Cada base de logaritmos determina un sistema de logaritmos en consecuencia existen infinitos sistemas de logaritmos para una base positiva y diferente de 1. Los sistemas más importantes son:

Sistema decimal o de Briggs. Es aquel sistema de logaritmos en el cual la base es 10.

$$\text{Notación: } \log_{10} N = \log N$$

7. $a^{x-z} = \frac{a^x}{a^z}; a \neq 0$

FUNCIÓN INVERSA DE EXPONENCIAL O FUNCIÓN LOGARÍTMICA

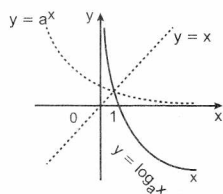
De las propiedades 1 y 2 deduce que la función exponencial de base a dada por $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$, es inyectiva en su dominio (\mathbb{R}) y por tanto admite función inversa que es llamada función logarítmica de base a y está definida por:

$g: \langle 0; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$g(x) = \log_a x$ (logaritmo de x en base a)

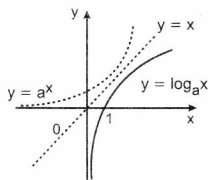
$D_g = \langle 0; +\infty \rangle$ y $R_g = \mathbb{R}$

En la figura 3 se muestra la gráfica de $g(x) = \log_a x$, si $0 < a < 1$ y en la figura 4 se muestra la gráfica de $g(x) = \log_a x$, si $a > 1$.



$0 < a < 1$

Figura 3



$a > 1$

Figura 4

Por definición de función inversa, tenemos:

$$1. \quad f(g(x)) = x, \forall x \in \langle 0; +\infty \rangle \text{ o } a^{\log_a x} = x, \forall x \in \langle 0; +\infty \rangle$$

$$2. \quad g(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ o } \log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

En resumen: $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$

Por ejemplo, $3^4 = 81 \Leftrightarrow 4 = \log_3(81)$

Propiedades de la función logarítmica de base a

- Si $0 < a < 1$, la función $g(x) = \log_a x$ es decreciente en su dominio (\mathbb{R}^+).
- Si $a > 1$, la función $g(x) = \log_a x$ es creciente en su dominio (\mathbb{R}^+).
- La gráfica de toda función logarítmica pasa por el punto $(1; 0)$.
- Si $0 < a < 1$, entonces:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$
- Si $a > 1$, entonces:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

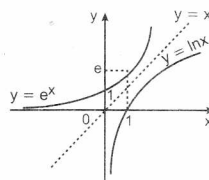
LOGARITMOS NATURALES Y DECIMALES

Como e es un número positivo y diferente de 1, las funciones definidas por $f(x) = e^x$ (función exponencial de base e).

$g(x) = \log_e x$ (función de base e)

Son tales que:

- $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \langle 0; +\infty \rangle$
 $D_g = \langle 0; +\infty \rangle$; $R_g = \mathbb{R}$
- Una es inversa de la otra.
- $2 < e < 3$
- Sus gráficas se muestran en la siguiente figura.



Observación:

- A $\log_e x$ se denomina logaritmo natural o neperiano de x y se denota como $\ln x$.
- A $\log_{10} x$ se denomina logaritmo decimal o vulgar de x y se denota con $\log x$.
- Por la fórmula de cambio de base, la relación entre $\ln x$ y $\log x$, está dada por:
 $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ o $\ln x = \frac{\log x}{\log e}$; de donde:
 $\log x \cong 0,4343 \ln x$ o $\ln x \cong 2,3026 \log x$
- Aunque estas funciones son casos particulares de las funciones exponenciales y logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:

$$1. \quad \ln(e^x) = x \quad 2. \quad e^{\ln x} = x$$

EJERCICIOS RESUELTOS

- Hallar una expresión equivalente a:

$$K = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

Resolución:

Realizando transformaciones convenientes:

$$\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{x^2 - (\sqrt{x^2 - 1})^2}$$

$$K = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \log \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1}{x^2 - x^2 + 1}$$

$$K = \log \left[x^2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} + (\sqrt{x^2 - 1})^2 \right]$$

$$\Rightarrow K = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \log (x + \sqrt{x^2 - 1})^2$$

$$\text{Finalmente, se pide: } K = 2\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

2. Hallar el valor de b que satisface la ecuación:
 $(\log_b 9)^2 - 4(\log_b 9) + 4 = 0$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } \log_b 9 = x$$

$$\text{Se tiene: } x^2 - 4x + 4 = 0; (x - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0; x = 2$$

$$\text{Reponiendo: } \log_b 9 = 2$$

$$\text{Por definición: } b^2 = 9$$

$$\text{Finalmente: } b = \pm \sqrt{9}; b = \pm 3 \Rightarrow b = 3$$

Se elimina como solución: $b = -3$ ya que la base nunca es negativa.

3. ¿Qué valor mayor de 7 resuelve la siguiente ecuación: $\log 16 + \log x + \log(x - 1)$
 $= \log(x^2 - 4) + \log 15$

Resolución:

Realizando transformaciones equivalente de composición: $\log[16x(x - 1)] = \log[15(x^2 - 4)]$

$$\text{Levantando logaritmos: } 16x(x - 1) = 15(x^2 - 4)$$

$$x^2 - 16x + 60 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 10)(x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x = 10 \vee x = 6$$

$$\therefore x = 10$$

4. Resolver la ecuación:
 $1 + 2\log x - \log(x + 2) = 0$

Resolución:

$$\text{Se tiene: } 1 + 2\log x - \log(x + 2) = 0$$

$$\text{Luego: } \log 10 + \log x^2 - \log(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \log \frac{10x^2}{x + 2} = \log 1$$

$$\text{Levantando logaritmos: } \frac{10x^2}{x + 2} = 1$$

$$\text{De donde: } 10x^2 - x - 2 = 0$$

$$(5x + 2)(2x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2}{5}; x = \frac{1}{2}; \text{ pero } x > 0 \text{ (por def. de } \log x)$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

5. Consideramos la ecuación: $\frac{\log(\sqrt{x^3} + 37)}{\log(\sqrt{x} + 1)} = 3$

Hallar las soluciones reales.

Resolución:

$$\text{Se tiene: } \frac{\log(\sqrt{x^3} + 37)}{\log(\sqrt{x} + 1)} = 3$$

Representando convenientemente:

$$\log(\sqrt{x^3} + 37) = \log(\sqrt{x} + 1)^3$$

tomando antilogaritmos a ambos miembros:

$$\sqrt{x^3} + 37 = (\sqrt{x} + 1)^3$$

$$\text{haciendo: } \sqrt{x} = \alpha, \text{ se tiene: } \alpha^3 + 37 = (\alpha + 1)^3$$

$$\text{efectuando: } \alpha^2 + \alpha - 12 = 0$$

$$\text{de donde: } (\alpha + 4)(\alpha - 3) = 0$$

$$\alpha = -4, \text{ o sea } \sqrt{x} = -4 \text{ (absurdo)}$$

$$\alpha = 3, \text{ o sea } \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

\therefore la única solución será 9.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver: $2^{\log_7(x^2 - 7x + 21)} = 3^{\log_7 4}$
 Indicar el mayor valor.
 a) 3 b) 4 c) 2 d) 7 e) 10

2. Resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{3\log(\log x)}{\log[\log(\log x)]} = 27$$

- a) 10^2 b) 10^4 c) 10
 d) 10^3 e) 10^5

3. Si: $\log(|x| - 1) = 1 + 2\log_{3/\sqrt{10}} \sqrt{2}$ se puede afirmar que: $\sqrt[4]{|x|} - 1$

- a) Es un número irracional.
b) Es un número negativo.
c) Es un número impar.
d) Es múltiplo de 4.
e) Es un número par.

4. Si: $\log_{(10+2\sqrt{21})}(\sqrt{7} + \sqrt{3})^n = 8$, resolver: $x^{x^x} = n$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{7}$
d) $\sqrt{10}$ e) 2

5. Calcular E, si $x = 10\sqrt{3}$

$$E = \log_x(3^{\log_3 x} + 4^{\log_2 x} + 6^{\log_6 x})$$

- a) 11 b) 3 c) 10
d) 9 e) 12

6. Calcular x, si: $3\log_x 16 + 7\log_x 8 = 22$

- a) $-\sqrt{8}$ b) 2 c) $2\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{2}$ e) $3/2$

7. Luego de resolver: $3^{1+\log x} + 3^{2+\log x} = 2^{3+\log x}$ indique lo correcto:

- a) $x = 0,04$ b) $x^2 = x + 1$
c) $10x - 1 = 0$ d) $x = 1$
e) $1/x = 100$

8. Resolver: $\frac{1}{\log_{(x-2)} 7} + \frac{1}{\log_{(x+1)} 7} = \log_7 4$

- a) 3 b) -3 c) -2
d) -1 e) \emptyset

9. Reducir: $F = \frac{\log_{\sqrt{3}} 5 \times \log_5 4 \times \log_4 \sqrt{27}}{\log_{ab} n + \frac{1}{\log_{\left(\frac{ab}{n}\right)} ab}}$

- a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

10. Resolver: $\log_x \log_x \sqrt[7]{4} = 7$

- a) 2 b) 4 c) $\sqrt[7]{2}$
d) 7 e) $\sqrt[7]{4}$

11. Si se sabe que: $a = \log_2 b$... (1)
 $b = \log_2 c$... (2)
 $c = \log_2 d$... (3)
 $bcd = 128$... (4)
 $b + c = 6$... (5)

calcular: $J = \frac{a+b}{cd}$

- a) 6 b) 2 c) 4 d) 3 e) d1

12. Si: $\log a = \sqrt{13} - \sqrt{7}$

$$\log b = \sqrt{7} - \sqrt{11}$$

$$\log c = \sqrt{11} - \sqrt{13}$$

calcular: $P = \frac{\log^3 a + \log^3 b + \log^3 c}{\log a^{\log b \log c}}$

- a) 3 b) 1 c) 2 d) $1/3$ e) 0

13. Reducir: $\log_n \left\{ \log_n \left\{ \log_n \frac{n-1}{\sqrt{n-n}} \right\} \right\}$ siendo $n > 1$.

- a) 1 b) $1/2$ c) n d) -1 e) -2

14. Si: $m, n \in \mathbb{R}^+ \wedge \log_{mn} m = 3$ calcular el valor de:

$$\log_{mn} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{m^7}}$$

- a) -6 b) -10 c) 6
d) -7 e) 7

15. Indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F) en:

I. $a^{\log a b} = b, b > 0 \wedge a \in \mathbb{R}$

II. $\log_5 12 - \log_5 4 = \log_5 8$

III. $\log_4 6 = \log_{64} 216$

- a) FVF b) FFV c) FVV
d) VVF e) VVF

16. Indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F) en:

I. $\log_2 15 = \log_2(-5) + \log_2(-3)$

II. $\log_3 \sqrt{2} = 2\log_3 2$

III. $\log_5 7 = \frac{1}{\log_7 5}$

- a) FVF b) VVF c) VVV
d) FFV e) FFF

17. Encontrar el valor de:

$$\log_7 5^{\log_5 343} + \log_2 9^{\log_9 128} - \log_5 13^{\log_{13} 25}$$

- a) 12 b) 10 c) 8
d) 5 e) 9

18. Calcular: $M = \log_4 49 \log_5 2 \log_{27} 125 \log_{\sqrt{7}} 3$

- a) 7 b) 2 c) 1
d) 14 e) 49

19. Calcular x en la igualdad:

$$x^{\log_x x^3} + 27x^{\log_x x} = 9x^{\log_x x^2} + 27 \quad (x > 0 \wedge x \neq 1)$$

- a) 9 b) 6 c) 3
d) 1 e) 27

20. Calcular el valor de n que cumpla la ecuación:

$$\log_2 n + \log_2 \left(1 + \frac{5}{n}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{3}{n+5}\right) + \log_2 \left(1 + \frac{4}{n+8}\right) = 6$$

- a) 62 b) 48 c) 52
d) 44 e) 56

CLAVES

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 1. b | 5. e | 9. c | 13. d | 17. c |
| 2. d | 6. d | 10. c | 14. b | 18. b |
| 3. e | 7. c | 11. c | 15. b | 19. c |
| 4. e | 8. e | 12. a | 16. d | 20. c |

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría
- Trigonometría
- Física
- Química
- Razonamiento Matemático
- Razonamiento Verbal
- Habilidad Verbal
- Economía y Ed. Cívica
- Lógica y Filosofía
- Historia del Perú
- Historia Universal
- Geografía
- Lengua
- Literatura
- Anatomía
- Psicología
- Biología

El Postulante
colección



Libros Gratis

@LibrosGratisPDFyDOC

EDITORIAL SAN MARCOS

Oficina principal: Jr. Dávalos Lissón 135, Lima

Central telefónica: 331-1535 / 331-0968 Fax: 330-2405

Oficina de ventas: Telf.: 433-7611 RPC: 989361413

E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com

Librería: Av. Garcilaso de la Vega 974, Lima. Telf.: 424-6563

E-mail: ventaslibreria@editorialsanmarcos.com

www.editorialsanmarcos.com

ISBN: 978-612-302-919-7



9 786123 029197