

ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS



INSTITUTO PROFESIONAL
VIRGINIO GOMEZ
DE LA UNIVERSIDAD DE CONCEPCION

Índice

Contenido

Unidad N° 1: Lógica y Cuantificadores

Lógica	5
Tablas de Verdad	6
Conectivos Lógicos u Operadores Lineales	7
Negación, Conjunción	7
Disyunción, Condicional	8
Bicondicional	9
Ejercicios	9
Tablas de Verdad para Proposiciones Compuestas	11
Ejercicios	13
Clasificación de Proposiciones Compuestas	15
Leyes del Algebra Proposicional	16
Ejercicios	19
Lógica Cuantificacional	19
Ejercicios	21
Valor de verdad funcion Proposicional	24
Ejercicios	29
Negación de Proposiciones	32
Autoevaluación	

Unidad N° 2: Conjuntos

Conjuntos	35
Formas de escribir un conjunto	36
Tipos de Conjuntos	37
Subconjuntos	40
Propiedades de los Subconjuntos	41
Ejercicios	42
Operaciones con conjuntos	43
Ejercicios	44
Figuras achuradas	52
Propiedades de los Conjuntos	53
Problemas de aplicación	55
Autoevaluación	61

Unidad N° 3: Relaciones y Funciones

Propiedades del Producto Cartesiano	64
Relación	66
Representación Gráfica	67
Dominio y Recorrido	68
Plano Cartesiano	70
Gráfico de algunas relaciones	71
Ejercicios	72
Función	83
Ejercicios	84

VIRGINIO GÓMEZ

Tipos de función	88
Función Inyectiva	91
Función Sobreyectiva	91
Función Biyectiva y Función Inversa	93
Análisis Completo	94
Autoevaluación	112

Unidad N° 4: Función Exponencial y Logarítmica

Función exponencial y logarítmica	106
Propiedades de la función Exponencial	108
Aplicaciones de la Función Exponencial	109
Función Logarítmica	113
Propiedades de la Función Logarítmica	115
Logaritmos Decimales o Comunes	117
Logaritmos naturales	118
Propiedades de los Logaritmo	121
Ecuaciones exponenciales	124
Ecuaciones Logarítmicas	127
Sistemas de ecuaciones logarítmicas y Exponenciales	129
Autoevaluación	131

Unidad N° 5: Trigonometría

Trigonometría	133
Sistemas de Medida	135
Angulos Coterminales	139
Angulo en posición estándar	142
Velocidad angular	141
Funciones trigonométricas	142
Signos de la funciones trigonométricas	145
Problemas aplicados	145
Angulos de elevación y depresión	153
Gráfico de las funciones trigonométricas	156
Gráfico de la función seno	164
Identidades	175
Ley de los Senos	181
Ley de los Cosenos	186
Ecuaciones Trigonométricas	192
Funciones trigonométricas inversas	194

Unidad N° 6: Números Complejos

Números Complejos	198
Representación gráfica de los números Complejos	199
Operaciones con complejos	202
Forma polar de un número complejo	205
Raíces de un número complejo	210

Unidad N° 7: Polinomios

Polinomios	216
Operaciones con Polinomios	216
Teorema del cociente y del resto	218
Teorema fundamental del álgebra	220

VIRGINIO GOMEZ

Unidad N° 8: Inducción Matemática

Inducción Matemática 225

Unidad N° 9: Teorema del Binomio

Teorema del Binomio 230

Fórmula general del Binomio 230

Bibliografía 235

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO I

LOGICA Y
CUANTIFICADORES

VIRGINIO GOMEZ

LOGICA

La Lógica Matemática es la disciplina que trata de métodos de razonamiento.

En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado.

El razonamiento lógico se emplea en matemática para demostrar teoremas; en Ciencias de la Computación para verificar si son o no correctos los Programas; en las Ciencias Físicas y Naturales, para sacar conclusiones de experimentos; y en las Ciencias Sociales y en la Vida Cotidiana, para resolver una multitud de problemas.

Ciertamente usamos en forma constante el razonamiento lógico para realizar cualquier actividad. Toda estructura matemática necesita tener un razonamiento válido a través de un lenguaje que sea de uso universal.

Proposición: Es una expresión con sentido en algún lenguaje que afirma o niega algo y que nos proporciona información.

Las proposiciones se denotan con la letras $p, q, r \dots$ etc..

Ejemplo 1:

p : El pizarrón es verde
 q : $2 + 3 = 7$
 r : A ella le gusta la música

Si observa las proposiciones, pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**, no aceptan ambigüedades.

No son proposiciones:

- a) el interruptor
- b) $2x + 3 = 6$
- c) ¿Qué hora es ?

Estos enunciados no son proposiciones porque no tienen sentido, no afirman ni niegan.

Valor de Verdad: Es una función que define una proposición. El valor de verdad puede ser Verdadero (V) o Falso (F).

Tablas de Verdad

Una Tabla de Verdad es una forma de resumir el valor de verdad de las proposiciones. Esta se construye de acuerdo al número de proposiciones distintas que se den.

El número de combinaciones posibles de valores de verdad se determina al resolver la expresión

$$2^n$$

n representa el número de proposiciones dadas.



¡¡ Veamos cómo funciona !!

- Si hay una sola proposición, $n = 1$, resolvemos $2^1 = 2$. Esto significa que se pueden dar **dos posibles valores de verdad** y la tabla que resulta es:

p	
V	
F	

- Si hay 2 proposiciones distintas p y q , $n = 2$, entonces resolvemos

$$2^2 = 4$$

Esto significa que se pueden dar **cuatro combinaciones** de valores de verdad y la tabla que resulta es :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

- Si hay tres proposiciones , $n = 3$, resolvemos

$$2^3 = 8$$

Es decir, se pueden dar **ocho combinaciones** de valores de verdad y la tabla es:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

...y así sucesivamente.

Las proposiciones pueden ser **simples o compuestas**. Son proposiciones simples las que se dan en el ejemplo anterior :

- p : El pizarrón es verde
- q : $2 + 3 = 7$
- r : A ella le gusta la música

Son **compuestas** aquella que se unen mediante símbolos llamados Conectivos.

Conectivos Lógicos u Operadores Lógicos:

Son símbolos que permiten relacionar una o más proposiciones.

Los conectivos son: la negación (\sim), la conjunción (\wedge), disyunción (\vee), condicional (\rightarrow) y bicondicional (\leftrightarrow).

¡¡ Veremos cada uno de ellos a continuación!!

1. — **Negación** : $\sim p$

Dado un enunciado p , se puede formar otro enunciado que se llama negación de p , escribiendo "es falso que..." o "no..." antes de la proposición p .

Simbólicamente se representa por

$$\boxed{\sim p}$$

Ejemplo 1:

p : el día está nublado

$\sim p$: el día no está nublado

El valor de verdad de la negación depende del valor de verdad de la proposición original. Si p es verdadero, entonces $\sim p$ es falso y viceversa.

La tabla de verdad que resume esto es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

2. — **La Conjunción**: $p \wedge q$

Dos proposiciones simples cualquiera se pueden unir mediante la palabra "y" para formar una proposición compuesta, que se llama Conjunción.

Simbólicamente se denota por

$$\boxed{p \wedge q}$$

Ejemplo 1:

p : Está nublado

q : Hace frío

$p \wedge q$: Está nublado y hace frío.

VIRGINIO GOMEZ

La tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. — **La Disyunción** : $p \vee q$

Dos enunciados cualquiera se pueden combinar mediante la palabra "o" (en el sentido y/o) para formar un nuevo enunciado que se llama disyunción de los dos enunciados previos. Simbólicamente se denota por:

$$p \vee q$$

Ejemplo :

p : La puerta se abre

q : La silla es de madera

$p \vee q$: La puerta se abre o la silla es de madera

La tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. — **La condicional** : $p \rightarrow q$

Muchos enunciados en matemática son de la forma "si p entonces q ". Estos se llaman condicionales y se les denota por:

$$p \rightarrow q$$

Ejemplo:

p : son las 10 de la mañana

q : la clase es de matemática

$p \rightarrow q$: Si son las 10 de la mañana entonces la clase es de matemática

La tabla de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

VIRGINIO GOMEZ

5. — **La bicondicional** : $p \leftrightarrow q$

Otro enunciado muy usado es el de la forma " p si y sólo si q ". Los cuales se llaman bicondicionales y se les denota por :

$$p \leftrightarrow q$$

Ejemplo

p : Hoy voy a ir al cine

q : Hace calor

$p \leftrightarrow q$: Hoy voy a ir al cine, si y sólo si, hace calor

La tabla de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicios

I). — Sean las proposiciones

p : El va a la fiesta

q : Ella es su polola

Escriba con palabras los siguientes enunciados:

- 1) $\sim q$:
- 2) $q \vee \sim p$:
- 3) $\sim \sim p$:
- 4) $\sim \sim q$:
- 5) $\sim p \leftrightarrow q$:
- 6) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$:
- 7) $p \rightarrow \sim q$:

II). — Sean las proposiciones:

p : Tengo dinero

q : Hoy dejaré de fumar

VIRGINIO GOMEZ

Escriba los siguientes enunciados verbales en forma simbólica usando p y q :

- 1) No tengo dinero
- 2) Si tengo dinero entonces hoy no dejaré de fumar
- 3) Tengo dinero, sí y sólo si, hoy dejo de fumar
- 4) No es verdad que, hoy no dejaré de fumar
- 5) No es verdad que, no tengo dinero y que hoy no dejaré de fumar
- 6) Es falso que, no tengo dinero o que hoy dejaré de fumar

Respuesta

I). –

- 1) Ella no es su polola
- 2) Ella es su polola o él no va a la fiesta
- 3) No es verdad que, él no va a la fiesta
- 4) No es verdad que, ella no es su polola
- 5) El no va a la fiesta, sí y sólo si, ella es su polola
- 6) Si él va a la fiesta y ella no es su polola, entonces él va a la fiesta
- 7) Si él va a la fiesta, entonces ella no es su polola

II. –

- 1) $\sim p$
- 2) $p \rightarrow \sim q$
- 3) $p \leftrightarrow q$
- 4) $\sim \sim q$
- 5) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
- 6) $\sim (\sim p \vee q)$

USO DE PARENTESIS

El uso de paréntesis es un símbolo que forma parte de la lógica secuencial, el uso de ellos es lógico y no retórico, sin los paréntesis las fórmulas o expresiones lógicas pueden carecer de sentido.

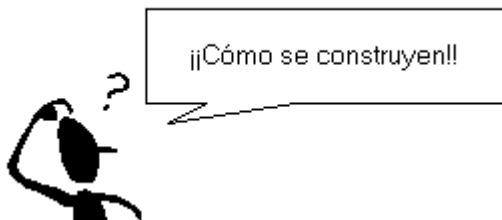
En el siguiente ejemplo, puede observar que las expresiones son claramente distintas:

$$a) p \rightarrow (q \vee r)$$

$$b) (p \rightarrow q) \vee r$$

TABLAS DE VERDAD PARA RESOLVER PROPOSICIONES COMPUESTAS

Una manera de mostrar la relación entre el valor de verdad de una proposición $P(p, q, \dots)$ y los valores de verdad de las proposiciones p, q, \dots es mediante una tabla de verdad.



Ejemplo

Sea la proposición $\sim (p \wedge \sim q)$

Primero:

Se completan las dos primeras columnas correspondientes a las proposiciones p y q

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segundo:

Se resuelve el paréntesis de la proposición, desde adentro hacia afuera:

p	q	$\sim q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Luego, se va completando la expresión que está dentro del paréntesis

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

...y **por último**: se completa toda la expresión en la tabla

VIRGINIO GOMEZ

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Por lo tanto, la solución de $\sim (p \wedge \sim q)$ está dada en la última columna.

Existe **otra forma** de completar la tabla de verdad de $\sim (p \wedge \sim q)$ y es la siguiente:

Se escribe toda la expresión en la tabla colocando cada parte de ésta en un cuadrado de la tabla

p	q	\sim	$(p$	\wedge	$\sim q)$

Se va completando la tabla de la siguiente forma:

p	q	\sim	$(p$	\wedge	$\sim q)$
V	V		V		F
V	F		V		V
F	V		F		F
F	F		F		V

p	q	\sim	$(p$	\wedge	$\sim q)$
V	V		V	F	F
V	F		V	V	V
F	V		F	F	F
F	F		F	F	V

La solución de $\sim (p \wedge \sim q)$ está dada en la columna de la negación (\sim).

p	q	\sim	$(p$	\wedge	$\sim q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V



VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios

I. – Construya la tabla de verdad de las siguientes expresiones lógicas:

- 1) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$
- 2) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow \sim q$
- 3) $\sim (p \rightarrow q) \wedge p$
- 4) $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
- 5) $\sim (p \rightarrow r) \wedge q$
- 6) $[\sim p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow \sim q$

II. – Si

p : Cecilia Bolocco es Primera Dama

q : $1 + 1 = 2$

r : $2 - 5 \neq 4$

Determine el valor de verdad de:

- 1) $[(r \vee \sim q) \wedge p] \vee \sim q$
- 2) $\sim [(\sim q \rightarrow \sim p) \vee \sim r] \leftrightarrow p$

III). – Si

p : $3x + 3y = 9$

q : $5x + y = 7$

r : $5y + x = 11$

$x = 1, y \neq 2, y \in \mathbb{R}$

Determine el valor de verdad de:

- 1) $[(p \vee q) \wedge \sim r] \rightarrow \sim q$
- 2) $\sim [(\sim q \rightarrow \sim p) \vee \sim r]$
- 3) $(\sim p \vee r) \rightarrow \sim q$

VIRGINIO GOMEZ

$$\begin{aligned}
 2) & \sim [(\sim q \rightarrow \sim p) \vee \sim r] \\
 & \sim [(\sim F \rightarrow \sim F) \vee \sim F] \\
 & \sim [(V \rightarrow V) \vee V] \\
 & \sim [V \vee V] \\
 & \sim [V] \\
 & F
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) & (\sim p \vee r) \rightarrow \sim q \\
 & (\sim F \vee F) \rightarrow \sim F \\
 & (V \vee F) \rightarrow V \\
 & (V) \rightarrow V \\
 & V
 \end{aligned}$$

Clasificación de las Proposiciones Compuestas

Tautología

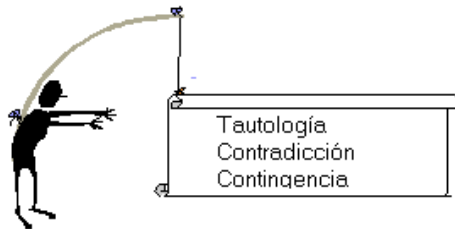
Una proposición $P(p, q, \dots)$ es una tautología si todos los valores de verdad de su última columna son Verdaderos, sean cuáles sean los valores de verdad de sus proposiciones.

Contradicción

Una proposición $P(p, q, \dots)$ es una Contradicción si todos los valores de verdad de su última columna son Falsos, sean cuáles sean los valores de verdad de sus proposiciones.

Contingencia

Una proposición $P(p, q, \dots)$ es una Contingencia si todos los valores de verdad de su última columna son Verdaderos y Falsos.



Ejemplo

Demuestre que la siguiente proposición es una tautología

$$\sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$$

Respuesta

					①	②	
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$	$\sim p \wedge q$	① \leftrightarrow ②
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	V

Por lo tanto, $\sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ es una Tautología.

Ejercicios

De las expresiones lógicas dadas, determine cuál de ellas es Tautología, Contradicción o Contingencia.

$$a) (\sim p \wedge q) \rightarrow \sim q \qquad b) p \vee [\sim (p \wedge \sim q) \leftrightarrow r]$$

Observación 1:

Cuando las proposiciones que se relacionan por el conectivo \rightarrow determinan una Tautología, entonces la expresión es una implicancia lógica y el conectivo cambia a \Rightarrow

Ejercicio

Demuestre que la siguiente expresión es una implicancia lógica

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Observación 2:

Cuando las proposiciones que se relacionan por el conectivo \leftrightarrow determinan una Tautología, entonces la expresión es una equivalencia lógica y el conectivo cambia a \Leftrightarrow

Ejemplo

En el ejercicio anterior, la expresión

$$\sim (p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q) \text{ es una Tautología, por lo tanto la escribimos:}$$

$$\sim (p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$$

Un ejemplo de equivalencia lógica son las **leyes Proposicionales**.

Leyes del Algebra Proposicional

1. — **Idempotencia**

$$a) p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$b) p \vee p \Leftrightarrow p$$

2. — **No Idempotencia**

a) $p \wedge F \Leftrightarrow F$

d) $p \vee V \Leftrightarrow V$

b) $p \vee F \Leftrightarrow p$

e) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$

c) $p \wedge V \Leftrightarrow p$

f) $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$

3. — **Conmutatividad**

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

c) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

4. — **Asociatividad**

a) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

5. — **Distributividad**

a) $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

b) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

6. — **Absorción**

a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

b) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

7. — **Negación**

a) $\sim F \Leftrightarrow V$

b) $\sim V \Leftrightarrow F$

c) $\sim(\sim V) \Leftrightarrow V$

8. — **De Morgan**

a) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

b) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

9. — **Condicionales**

a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

b) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

VIRGINIO GÓMEZ

10. – **Doble Implicación**

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

Usando las leyes proposicionales también es posible encontrar otra expresión equivalente a la que se da, esto se hace simplificando la proposición compuesta dada.

Ejemplo

Simplifique la expresión $(p \vee q) \rightarrow \sim p$ e indique cada paso que realizó

Respuesta

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \rightarrow \sim p \\ & \sim (p \vee q) \vee \sim p && \text{Por Condicional} \\ & (\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p && \text{De Morgan} \\ & \sim p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{Conmutatividad} \\ & \sim p && \text{Absorción} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(p \vee q) \rightarrow \sim p \Leftrightarrow \sim p$$

Ejercicios

I) Simplifique las siguientes expresiones, justifique cada paso:

1. – $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$
2. – $p \vee (\sim q \rightarrow p)$
3. – $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
4. – $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

II) Niegue las siguientes expresiones, justifique cada paso:

- 1) $\sim p \wedge q$
- 2) $[p \vee (q \wedge \sim p)]$
- 3) $(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$
- 4) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

III) Demuestre que, justifique cada paso:

- 1) $[\sim p \rightarrow (\sim q \wedge p)] \Leftrightarrow p$
- 2) $[(p \rightarrow q) \vee (\sim p \rightarrow \sim q)] \Leftrightarrow V$
- 3) $[p \vee (q \wedge \sim p)] \Leftrightarrow (p \vee q)$

$$4) \quad [(p \rightarrow \sim q) \vee \sim q] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$5) \quad [(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

Respuesta

- | | | | | | | | | |
|-----|------|-----------------|------|------------------------|------|-----|------|-----|
| I) | 1. — | V | 2. — | $p \vee q$ | 3. — | V | 4. — | V |
| II) | 1) | $p \vee \sim q$ | 2) | $\sim p \wedge \sim q$ | 3) | p | 4) | F |

LOGICA CUANTIFICACIONAL

Es una rama de la lógica que utiliza determinados símbolos llamados CUANTIFICADORES, los cuales permiten indicar el número de elementos de un conjunto que al ser sustituidos en un enunciado hacen de él una proposición verdadera.

Función lógica o proposicional

Es una afirmación que contiene una o más variable.
Las funciones proposicionales se denotan por letras minúsculas, y las variables se escriben dentro de un paréntesis, por ejemplo:

$p(x)$, $q(x)$, $r(y)$ son funciones proposicionales, x e y son variables.

Ejemplo 1:

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la función proposicional

$$p(x) : x + 2 \leq 5, \quad x \in A$$

Determine qué valores cumplen la función.

Respuesta

Sustituiremos cada elemento de A en la función proposicional $p(x)$.

$$\text{Sea } x = 1 \Rightarrow p(1) = 1 + 2 \leq 5 \quad \text{V}$$

$$\text{Sea } x = 2 \Rightarrow p(2) = 2 + 2 \leq 5 \quad \text{V}$$

$$\text{Sea } x = 3 \Rightarrow p(3) = 3 + 2 \leq 5 \quad \text{V}$$

Observe que :

" **todos los elementos que están en A cumplen la proposición $p(x)$** ", esto se puede simbolizar por el cuantificador: \forall y es el Cuantificador Universal.

\forall se lee " para todo " , " todo "

Simbólicamente escribimos todo el enunciado de la siguiente forma:

$$\boxed{(\forall x \in A)(p(x) : x + 2 \leq 5)}$$

Esta función lógica es cuantificada.

Ejemplo 2:

Sea $A = \{-1, 0, 1\}$ y $q(x) : |x| + 3 = 4$

Determine qué valores del conjunto A cumplen con la proposición

Respuesta

Sustituiremos todos los elementos

$$\begin{array}{lcl} x = -1, & q(-1) : & \begin{array}{l} |-1| + 3 = 4 \\ 1 + 3 = 4 \\ 4 = 4 \end{array} & V \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = 0, & q(0) : & \begin{array}{l} |0| + 3 = 4 \\ 0 + 3 = 4 \\ 3 = 4 \end{array} & F \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x = 1, & q(1) : & \begin{array}{l} |1| + 3 = 4 \\ 1 + 3 = 4 \\ 4 = 4 \end{array} & V \end{array}$$

Observe que sólo algunos elementos de A cumplen la proposición $q(x)$, esto se simboliza por otro cuantificador: \exists , llamado Cuantificador Existencial.

\exists se lee "existen", "algunos elementos" o "existe al menos un ..."

Simbólicamente escribimos todo el enunciado de la siguiente forma:

$$\boxed{(\exists x \in A)(q(x) : |x| + 3 = 4)}$$

$$\boxed{\exists x, x \in A, q(x) : |x| + 3 = 4}$$

Ejemplo 3:

Sea $A = \{-2, \sqrt{3}, -3\}$ y $r(x) : x^2 + 6 = x^4$

Determine qué valores del conjunto A cumplen con la proposición

Respuesta

Sustituiremos cada elemento en $r(x)$

$$x = -2, \quad r(-2) : (-2)^2 + 6 = (-2)^4$$

$$4 + 6 = 16$$

$$10 = 16 \quad \text{F}$$

$$x = \sqrt{3}, \quad r(\sqrt{3}) : (\sqrt{3})^2 + 6 = (\sqrt{3})^4$$

$$3 + 6 = (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})^2$$

$$9 = 9 \quad \text{V}$$

$$x = -3, \quad r(-3) : (-3)^2 + 6 = (-3)^4$$

$$9 + 6 = 81$$

$$15 = 81 \quad \text{F}$$

En este ejemplo, de todos los elementos de A , sólo $\sqrt{3}$ cumple con la proposición, esto se simboliza por $\exists!$, el cual es otro Cuantificador Existencial.

$\exists!$ se lee "existe un único"

Del ejemplo anterior: $\exists! x \in A, r(x) : x^2 + 6 = x^4, A = \{-2, \sqrt{3}, -3\}$

Ejemplo

Sea $p(x)$ una función proposicional, sobre el conjunto \mathbb{R} , use cuantificadores para escribir:

Todo real cumple con $p(x)$

Respuesta

$\forall x, x \in \mathbb{R}, p(x)$



Ejercicios

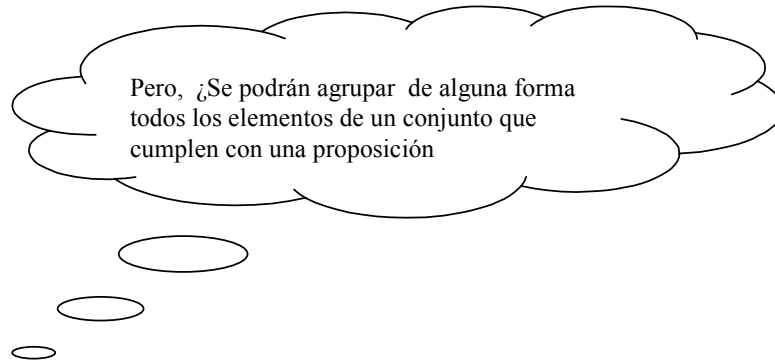
Sea $p(x)$ una función proposicional, sobre el conjunto \mathbb{R} , use cuantificadores para escribir los siguientes enunciados.

- a) Existe un real que cumple con $p(x)$:
- b) Algún real cumple con $p(x)$:
- c) Todo real al cuadrado es positivo o cero :
- d) La ecuación $2x + 3 = 0$ tiene solución única en \mathbb{R} :
.....
- e) Existe por lo menos un real tal que su raíz cuadrada no es real :
.....
- f) No todos los números enteros son positivos :
.....

VIRGINIO GÓMEZ

Respuesta

- a) $\exists x, x \in \mathbb{R}, p(x)$
- b) $\exists x, x \in \mathbb{R}, p(x)$
- c) $\forall x, x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- d) $\exists! x, x \in \mathbb{R}, p(x) : 2x + 3 = 0$
- e) $\exists x, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \notin \mathbb{R}$
- f) $\exists x, x \in \mathbb{Z}, x \leq 0$



Si, en un conjunto llamado Conjunto de Validez.

Por lo tanto, el conjunto de validez es aquel en el cual están todos los valores para los cuales la proposición es verdadera.

Su notación es V_p , p indica la proposición.

¡¡ Veamos un ejemplo de esto !!

Ejemplo

Sea $A = \{2, 3, 4\}$, $s(x) : x - 1 > 2$

Respuesta

Sea $x = 2$	$s(2) : 2 - 1 > 2$	
	$1 > 2$	F
$x = 3$	$s(3) : 3 - 1 > 2$	
	$2 > 2$	F
$x = 4$	$s(4) : 4 - 1 > 2$	
	$3 > 2$	V

Es decir, el conjunto de Validez es $V_s = \{4\}$, ya que sólo el 4 cumple con la proposición $s(x)$.

VIRGINIO GOMEZ

Valor de Verdad de una función proposicional

El valor de verdad de una función proposicional depende del cuantificador y del conjunto de validez.

¡¡ Más ejemplos !!

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y la función:

$$\forall x, x \in A, p(x) : 2x + 1 = 5$$

Respuesta:

Si sustituimos cada elemento de A en $p(x)$, se observa que sólo cuando $x = 2$, la proposición se cumple, es decir:

$$\begin{aligned} p(2) : 2(2) + 1 &= 5 \\ 4 + 1 &= 5 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

$$V_p = \{2\}$$

Como la función lógica decía que:

Para todos los elementos de A se cumple la proposición $p(x)$, obviamente esto es FALSO, ya que sólo se cumple para un elemento.

Por lo tanto : $\forall x, x \in A, p(x) : 2x + 1 = 5$ es **falso**

Ejercicios

Determine el conjunto de validez y el valor de verdad para cada función lógica dada:

Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

- a) $\forall x, x \in A, p(x) : x + 2 \leq 1$
- b) $\exists x, x \in A, q(x) : |x| + 1 \geq 1$
- c) $\exists! x, x \in A, r(x) : x + 1 < 2$
- d) $\forall x, x \in A, p(x) : -x + 2 \leq 3$
- e) $\exists x, x \in A, s(x) : 3|x| - 1 \geq -1$

Respuesta

a) $V_p = \{-2, -1\}$

Valor de verdad : Falso

b) $V_q = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Valor de verdad : Verdadero

c) $V_r = \{-2, -1, 0\}$

Valor de verdad : Falso

d) $V_p = \{-1, 0, 1, 2\}$

Valor de verdad : Falso

e) $V_s = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Valor de verdad : Verdadero

Ahora, recurriremos a las tablas verdad vistas anteriormente, pero las llamaremos **Tablas de doble Entrada** para resolver las siguientes funciones lógicas:

Ejemplo

Determine el valor de verdad de:

$$\forall x, x \in A, p(x) \leftrightarrow [p(x) \rightarrow q(x)]$$

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ con :

$p(x) : 2x + 1 \leq 4$

$q(x) : x - 3 < x^2$

Respuesta:

Se construye la tabla de doble entrada:

	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \rightarrow q(x)$	$p(x) \leftrightarrow [p(x) \rightarrow q(x)]$
-1				
0				
1				
2				

Luego, se sustituyen los elementos de A , en cada una de las proposiciones, para determinar cuáles de ellos cumplen con la proposición dada:

	$p(x)$	$q(x)$	$p(x) \rightarrow q(x)$	$p(x) \leftrightarrow [p(x) \rightarrow q(x)]$
-1	V	V	V	V
0	V	V	V	V
1	V	V	V	V
2	F	V	V	F

Conjunto de Validez $V(p, q) = \{-1, 0, 1\}$

Valor de verdad: Falso

¿Y qué pasa si el conjunto es el de los números reales?

Veamos un ejercicio en el cuál el conjunto es el de los números reales.

Ejemplo:

$$\exists x, x \in \mathbb{R}, x + 1 < 0 \vee x - 3 > 1$$

i) Para determinar el Conjunto de Validez, se resuelven las inecuaciones y se determina la solución Total:

$$\begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{l} x - 3 > 1 \\ x > 4 \end{array}$$

Recuerda que los conjuntos soluciones en los reales se representan con intervalos.

La solución es :



Conjunto de validez : $] - \infty, -1[\cup] 4, + \infty[$

ii) Para determinar el Valor de verdad, se lee el cuantificador y se compara con el Conjunto de Validez.

Valor de Verdad : Verdadero

Ejercicios

En cada uno de los siguientes ejercicios , determine:

- Tabla de verdad
- Conjunto de validez
- Valor de verdad

1. — Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y la función proposicional:

$$\exists x, x \in A, \sim p(x) \leftrightarrow [q(x) \wedge \sim r(x)]$$

$$p(x) : x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$q(x) : x - 1 \geq 0$$

$$r(x) : \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}$$

2. — Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la función proposicional:

$$\exists x, x \in A, [(\sim q(x) \wedge \sim p(x)) \rightarrow r(x)]$$

$$p(x) : 2x + 1 \leq 4$$

$$q(x) : x + 3 > 0$$

$$r(x) : x \text{ es divisible por } 2$$

3. — $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y la función proposicional:

$$\exists x, x \in A, p(x) \leftrightarrow [(\sim p(x) \vee r(x)) \rightarrow q(x)]$$

$$p(x) : x + 3 < 5$$

$$q(x) : x^2 + 1 \leq 3$$

$$r(x) : x > 0$$

$$4. - \exists x, x \in \mathbb{R}, 2x + 1 \leq 1 \wedge 2x - 3 < 5$$

$$5. - \exists! x, x \in \mathbb{R}, x + 2 \leq -1 \vee \frac{2x - 3}{4} < 5$$

$$6. - \forall x, x \in \mathbb{R}, 3x + 2 < -1 \wedge \frac{5x + 7}{4} > -9$$

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta

1. –

a)

	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim r(x)$	$q(x) \wedge \sim r(x)$	$\sim p(x) \leftrightarrow [1]$
-2	F	F	V	V	F	F	F
-1	V	F	V	F	F	F	V
0	F	F	V	V	F	F	F
1	F	V	V	V	F	F	F
2	F	V	V	V	F	F	F

b) $V_{(p,q,r)} = \{-1\}$

c) Verdadero

2. –

a)

	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim q(x)$	$\sim q(x) \wedge \sim p(x)$	$1 \rightarrow r(x)$
0	V	V	V	F	F	F	V
1	V	V	F	F	F	F	V
2	F	V	V	V	F	F	V
3	F	V	F	V	F	F	V
4	F	V	V	V	F	F	V

b) $V_{(p,q,r)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) Verdadero

3. –

a)

	$p(x)$	$q(x)$	$r(x)$	$\sim p(x)$	$\sim p(x) \vee r(x)$	$1 \rightarrow q(x)$	$p(x) \leftrightarrow 2$
0	V	V	F	F	F	V	V
1	V	V	V	F	V	V	V
2	F	F	V	V	V	F	V
3	F	F	V	V	V	F	V
4	F	F	V	V	V	F	V

b) $V_{(p,q,r)} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

d) Verdadero

4) $V =] - \infty, 0]$ Verdadero

5) $V =] - \infty, 23/2[$ Falso

6) $V =] - 43/5, -1[$ Falso

NEGACION DE PROPOSICIONES QUE CONTIENEN CUANTIFICADORES

Para negar una proposición cuantificada hay que cambiar el cuantificador y negar la función proposicional reduciéndola al máximo usando las leyes proposicionales.

Por ejemplo:

$$\exists x, x \in A, p(x) \rightarrow q(x) \quad A \text{ es un conjunto numérico cualquiera}$$

La negación es :

$$\sim (\exists x, x \in A, p(x) \rightarrow q(x))$$

La negación de \exists es \forall

La negación de \forall es \exists

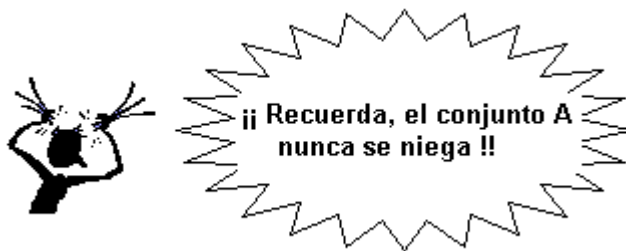
La negación de $p(x) \rightarrow q(x)$ la desarrollaremos aparte:

$$\begin{aligned} \sim [p \rightarrow q] \\ \sim [\sim p \vee q] \\ p \wedge \sim q \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión negada de:

$$\exists x, x \in A, p(x) \rightarrow q(x) \text{ resulta :}$$

$$\forall x, x \in A, p(x) \wedge \sim q(x)$$

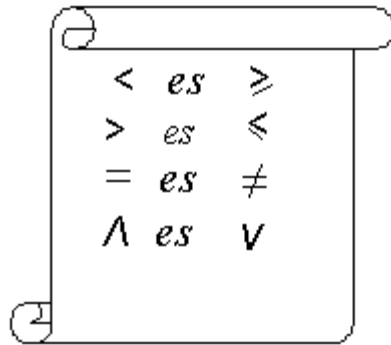


Es incorrecto escribir:

$$x \notin A$$

La negación de:

VIRGINIO GOMEZ



y viceversa.

Ejercicios

Sean las siguientes proposiciones, encuentre su negación:

1. – $\exists x, x \in A, p(x) \vee q(x)$
2. – $\forall x, x \in A, \sim p(x) \rightarrow q(x)$
3. – $\exists x, x \in A, [(\sim p(x) \vee q(x)) \rightarrow p(x)]$
4. – $\forall x, x \in \mathbb{R}, 2x + 1 \leq 1 \wedge 2x - 3 < 5$
5. – $\exists x, x \in A, 5x \geq 1 + x \vee 6x - 1 < -3$

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta

1. — $\forall x, x \in A, (\sim p(x) \wedge \sim q(x))$
2. — $\exists x, x \in A, (\sim p(x) \wedge \sim q(x))$
3. — $\forall x, x \in A, \sim p(x)$
4. — $\exists x, x \in \mathbb{R}, 2x + 1 > 1 \vee 2x - 3 \geq 5$
5. — $\forall x, x \in A, 5x < 1 + x \wedge 6x - 1 \geq -3$

Un poco de historia...

George Boole (1815-1864), hombre modesto y autodidacta, hijo de un humilde zapatero inglés, publicó *The Mathematical Analysis of Logic*. Este y otros trabajos fueron motivo de su nombramiento como profesor de matemáticas (pese a carecer de títulos universitarios) del Queens College (hoy University College) de Cork, en Irlanda. Allí escribió su tratado *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Londres, 1854). La idea fundamental —sustituir por símbolos todas las palabras utilizadas en lógica formal—

VIRGINIO GÓMEZ

AUTOEVALUACION

- 1) Demuestre que $(p \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \sim q$.Jusqtifique cada paso
- 2) Si
 $p : 2 > 3$, $q : -4 < 0$, $r : \text{El fútbol es un paso de baile}$

Determine el valor de verdad de

$$\sim p(x) \leftrightarrow [q(x) \wedge \sim r(x)]$$

- 3) Determine en el siguiente ejercicio:

- a) Tabla de verdad
b) Conjunto de validez
c) Valor de verdad

$$\exists! x, x \in A, [(\sim p(x) \wedge q(x)) \rightarrow p(x)] \wedge \sim q(x)$$

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{con :}$$

$$p(x) : 2|x| - 1 \leq 4$$

$$q(x) : x^2 - x > 3$$

- 4) Sean las proposiciones

$$p : 2 + 3 = -1, \quad \text{con } y \neq -1, y \in \mathbb{R}$$

$$q : 5 + y = 4$$

$$r : 3^3 + 3 < 10$$

Determine el valor de verdad de

$$(\sim r \wedge \sim p) \vee [\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim q]$$

VIRGINIO GOMEZ

RESPUESTAS

$$\begin{aligned}
 1) \quad & (p \rightarrow q) \rightarrow \sim q \Leftrightarrow \sim q \\
 & (\sim p \vee q) \rightarrow \sim q \\
 & \sim (\sim p \vee q) \vee \sim q \\
 & (p \wedge \sim q) \vee \sim q \\
 & \quad \quad \quad \sim q
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \text{Condicional} \\
 \text{Condicional} \\
 \text{Ley de Morgan} \\
 \text{Absorción}
 \end{array}$$

2) V

3)

			(1)		(2)		
	$p(x)$	$q(x)$	$\sim p(x)$	$\sim q(x)$	$\sim p(x) \wedge q(x)$	$(1) \rightarrow p(x)$	$(2) \wedge \sim q(x)$
-2	V	V	F	F	F	V	F
-1	V	F	F	V	F	V	V
0	V	F	F	V	F	V	V
1	V	F	F	V	F	V	V
2	V	F	F	V	F	V	V

V de Verdad : F

$V_A : \{-1, 0, 1, 2\}$

4) $p : F \qquad q : F \qquad r : F$

$$\begin{aligned}
 & (\sim r \wedge \sim p) \vee [\sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim q] \\
 & (V \wedge V) \vee [\sim (F \rightarrow F) \leftrightarrow V] \\
 & \quad V \vee [\sim V \leftrightarrow V] \\
 & \quad V \vee F \\
 & \quad \quad V
 \end{aligned}$$

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO II

CONJUNTOS

VIRGINIO GOMEZ

CONJUNTOS

En el lenguaje cotidiano, decimos un curso de Álgebra, un montón de libros de matemática, un cajón de ropa, la ciudad de Concepción, etc., es decir, usamos muchas palabras para expresar una misma idea. Los matemáticos prefieren la palabra **Conjunto** para expresar lo mismo.



Por lo tanto, podemos definir Conjunto como sigue:

Un **conjunto** es una colección de objetos que está bien definido y se denotan por letras mayúsculas.

Estas letras pueden ser A, B, C, etc.

Algunos ejemplos de conjuntos son :

Ejemplo 1 : $A = \{\text{Jugadores de la Selección chilena año 1999}\}$

Ejemplo 2 : $B = \{a, e, i, o, u\}$

Ejemplo 3 : $C = \{\text{números naturales mayores que 2 y menores que 6}\}$

¿...Pero , sabes cómo se llaman los objetos de un conjunto ?

Cada objeto de un conjunto se llama **elemento del conjunto**.

Y si el elemento está en el conjunto se dice que pertenece al conjunto en caso contrario se dice no pertenece, esto se simboliza \in o \notin

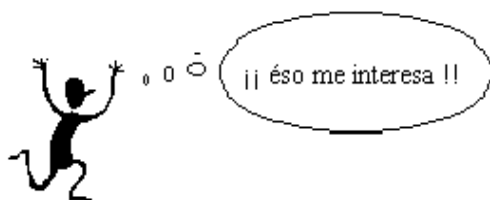
Observe que los elementos de un conjunto se escriben entre llaves $\{ \}$

En la siguiente tabla se muestra un paralelismo entre este lenguaje simbólico y cotidiano.

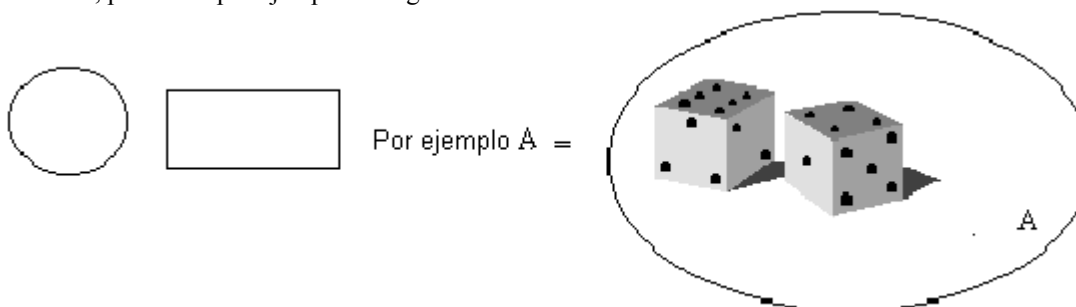
Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Simbólico
Marcelo Salas integra la Selección Chilena del año 2003	Marcelo Salas $\in A$
El Chino Ríos (que es tenista), no integra la Selección Chilena	Chino Ríos $\notin A$

En matemática, los elementos de un conjunto, se designan por x, y, z, a, b, \dots , etc, es decir, cualquier letra minúscula.

¿Te has dado cuenta que en ocasiones es más fácil interpretar las cosas cuando se presentan en forma gráfica ? ... en los conjuntos pasa algo similar, de ahí que es útil el uso de Diagramas de Venn.



Los Diagrama de Venn-Euler nos permiten visualizar en forma sencilla e instructiva los conjuntos y sus relaciones, presentan por ejemplo las siguientes formas:



Formas de escribir un conjunto:

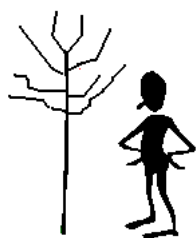
Usualmente un conjunto se escribe de dos maneras:

1) **Por Comprensión:** En esta forma se escribe una característica de los elementos

Por ejemplo: $A = \{x/x \text{ es un árbol autóctono de Chile}\}$

2) **Por Extensión:** Escritura en la cual los elementos se identifican.

Por ejemplo: $A = \{ \text{Raulí, Avellano, Coihue, Roble, ...} \}$



Ejercicios

1) Sea G el conjunto de numeros naturales menores que 5:

a) Escriba el conjunto por Comprensión

b) Escriba el conjunto por Extensión

Respuestas

a) $G = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}$

b) $G = \{1, 2, 3, 4\}$

Algunos tipos de Conjuntos son:

Conjunto Vacío este conjunto es aquel que no tiene elementos. Se simboliza por \emptyset o $\{ \}$

Ejemplo 1 : Conjunto de canciones rancheras interpretadas por el grupo Kiss

Ejemplo 2 : {números que pertenezcan al conjunto de los números naturales y que sean negativos }

Conjunto Universo: Es el conjunto que contiene todos los elementos a los cuales pudiéramos hacer referencia en un momento dado, estos pueden ser infinitos o finitos.

Ejemplo 1: El conjunto de jugadores de un equipo de fútbol es finito

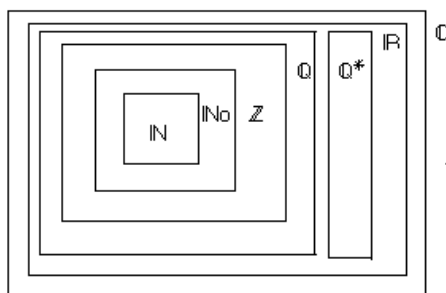
Ejemplo 2: El conjunto de los números Enteros es infinito

Conjuntos Disjuntos: Son aquellos conjuntos que no tienen ningún elemento en común

Ejemplo 1 : El conjunto de alumnos aprobados en Algebra es un conjunto disjunto con el de los alumnos reprobados

Ejemplo 2 : Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Los conjuntos A y B no tienen ningún elemento en común

Conjuntos Numéricos: Son aquellos conjuntos formados por números y que tienen un número infinito de elementos



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

\mathbb{N} : Números Naturales

\mathbb{N}_0 : Números Cardinales

\mathbb{Z} : Números Enteros

\mathbb{Q} : Números Racionales

\mathbb{R} : Números Reales

\mathbb{C} : Números Complejos

\mathbb{Q}^* : Números Irracionales

Ejercicios

1) De los conjuntos dados, indique cuál de ellos es o son vacíos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 1\}$

2) Determine en qué caso, el par de conjuntos dados es disjunto:

a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{5, 9, 0\}$

b) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 5\}$

c) $A = \{\text{Tenistas Top Ten Ranking ATP tour}\}$ $B = \{\text{Tenistas chilenos}\}$

3) Determine a qué conjunto pertenece el número dado. Marque con una "x"

*	Natural	Entero	Irracional	Racional	complejo
-5					
8.3					
π					
$-\frac{3}{5}$					
-10.3					
$\sqrt[4]{4}$					
-2π					
$\sqrt{-1}$					
8					
$\frac{355}{113}$					
0					
$-\sqrt{2}$					
$\sqrt{2}$					

Respuesta

1) Son conjuntos vacíos A y B

2) Son disjuntos los conjuntos dados en (a) y en (c)

Para escribir un conjunto existen ciertas reglas universalmente aceptadas.

3)

*	Natural	Entero	Irracional	Racional	complejo
-5		x		x	x
8.3				x	x
π			x		x
$-\frac{3}{5}$				x	x
-10.3				x	x
$\sqrt[4]{4}$			x		x
-2π			x		x
$\sqrt{-1}$					x
8	x	x		x	x
$\frac{355}{113}$				x	x
0		x		x	x
$-\sqrt{2}$			x		x
$\sqrt{2}$			x		x

¿ Existen otros conceptos importantes de conocer en los conjuntos ?

Si, en los conjuntos podemos definir otros conceptos, los cuales nos servirán para resolver más problemas. Estos son los de **Igualdad** y **Subconjuntos**, que se definen a continuación.

Dados dos conjuntos cualquiera A y B

• **Igualdad:** Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, no importa el orden de éstos. La igualdad se representa por $A = B$

Ejemplo 1:

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, 3\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 3\}$

Respuesta

Los conjuntos A y B muestran claramente que ambos tienen los mismos elementos aunque en distinto orden. El conjunto C está escrito por comprensión y dice que los elementos de este conjunto son números naturales menores o iguales a 3, es decir, quienes cumplen esta condición son los números 1, 2 y 3. Por lo tanto:

$$A = B = C$$

Ejemplo 2:

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x \leq 0\}$ y $B = \{-1, 0\}$

Respuesta

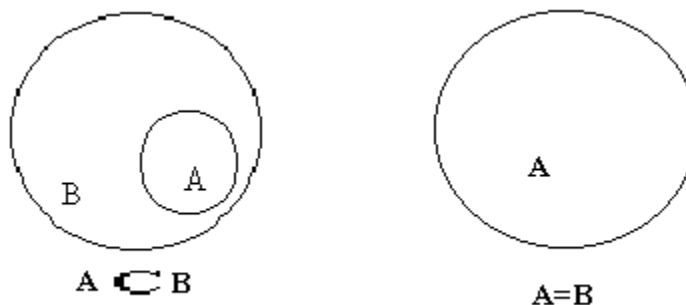
Estos conjuntos son iguales, porque A tiene elementos del conjunto \mathbb{Z} y estos son $\{-1, 0\}$

Por lo tanto, $A = B$

• **Subconjunto:** Decimos que A es subconjunto de B si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B, es decir, A está contenido en B.

Simbólicamente:

$A \subseteq B$ significa "A es un subconjunto de B o igual a B"
Gráficamente, esto se muestra en la figura:



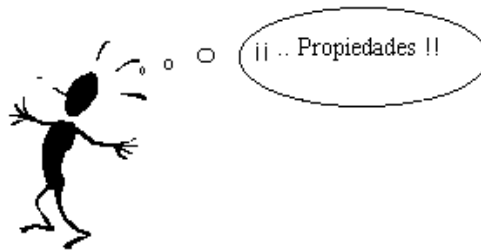
Si un conjunto **no es subconjunto** de otro se denota por:



Ejemplo 1: La sección 1 de Construcción Civil es un subconjunto de toda la carrera de Construcción Civil.

Ejemplo 2: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1\}$, el conjunto B tiene un sólo elemento y éste está en el conjunto A, por lo tanto, $B \subseteq A$

Ahora bien, los subconjuntos cumplen ciertas propiedades que conviene saber, ya que nos facilitan la comprensión de los conjuntos y sus problemas.



Propiedades de los subconjuntos:

Estas propiedades se cumplen para cualquier conjunto A

- 1) El conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto:

$$\emptyset \subseteq A$$

- 2) Todos los conjuntos son subconjuntos de sí mismo:

$$A \subseteq A$$

- 3) Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto Universo U:

$$A \subseteq U$$

Todas estas propiedades son útiles para un conjunto denominado conjunto de las partes o conjunto potencia.



Curioso nombre, pero se llama Conjunto de las Partes porque está formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado. El número de elementos (o cardinalidad) de él está dado por la solución de la expresión: 2^n , donde "n" indica la cardinalidad del conjunto original. Su notación es $P(A)$.

Ejemplo:

Sea $M = \{a, b, c\}$. Determinar su Conjunto Potencia.

Respuesta:

El conjunto M tiene 3 elementos, es decir $n = 3$, por lo tanto el conjunto potencia tiene $2^3 = 8$ elementos y estos son:

$$P(M) = \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\} \right\}$$

Observe que los elementos de $P(M)$ se escriben entre llaves $\{ \}$ y algunos de los subconjuntos fueron determinados por las propiedades de los subconjuntos dadas anteriormente.

Ejercicios

I) Sean $A = \{-3, 0, 5\}$, $B = \{0, 5, -3\}$, $C = \{0, 5\}$. Determinar si las siguientes proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). En el caso de que sean falsas indique la razón:

a) $C \subseteq A$

b) $A = B$

c) $C \in A$

d) $C \subseteq B$

e) $A \neq C$

f) $\emptyset = \{\emptyset\}$

g) $A \subseteq B$

h) $\emptyset \subseteq B$

II) Sea $A = \{a, b\}$. Encontrar $P(A)$ y luego determine si las siguientes proposiciones son Verdaderas (V) o Falsas (F). En el caso de que sean falsas indique la razón:

a) $a \subseteq P(A)$

b) $\{a\} \in P(A)$

c) $\{a\} \subseteq P(A)$

d) $\{\{a\}\} \subseteq P(A)$

e) $\{a, b\} \subseteq P(A)$

Respuesta

I)

a) V

b) V

c) F, C no es un elemento de A.

d) V

e) V

f) F, la expresión $\{\emptyset\}$, representa un conjunto que tiene un elemento y este es \emptyset

g) V

h) V

II)

El Conjunto Potencia tiene $2^2 = 4$ elementos y es $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

- a) F, porque "a" es un elemento y la notación \subseteq representa subconjunto
- b) V
- c) F, porque $\{a\}$ representa un elemento de $P(A)$
- d) V
- e) F, porque $\{a, b\}$ es un elemento de $P(A)$

¿Hay más que saber de los conjuntos ? :: Por supuesto que sí !! Y son las operaciones que se realizan con ellos.



OPERACIONES CON CONJUNTOS

Los conjuntos nos permiten resolver problemas cotidianos a través de las operaciones que se pueden definir con ellos.

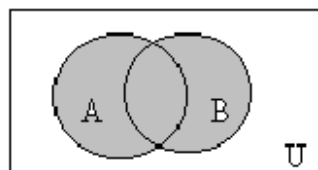
Tomemos dos conjuntos cualesquiera, a los cuales llamaremos A y B

La **Unión** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos de A o B o ambos.

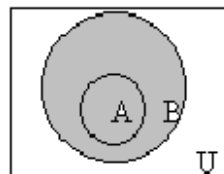
La unión de A y B se representa simbólicamente por $A \cup B$

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

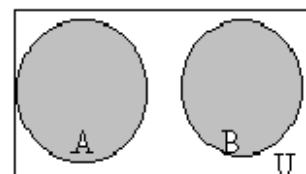
A continuación, se presentan tres formas gráficas distintas de cómo se pueden relacionar los conjuntos, lo achurado representa la unión de ellos.



$A \cup B$



$A \subset B \cdot A \cup B = B$



$A \cup B$

Ejemplo 1:

Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$ Determine $A \cup B$

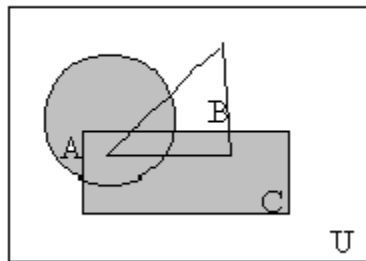
Respuesta

El conjunto $A \cup B = \{a, b, c, d\}$ es el conjunto que tiene los elementos de A o B.

Nótese que cada elemento se escribe una sola vez aunque se haya repetido más de una, como es el caso de la letra "a" que aparece dos veces.

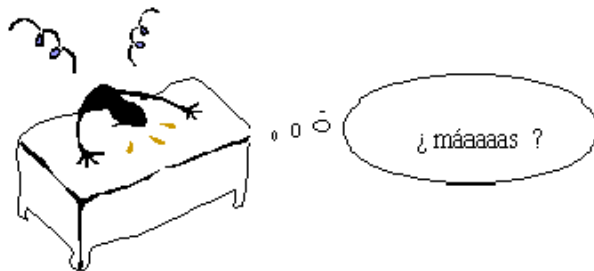
Ejemplo 2:

Un ejemplo gráfico se presenta a continuación con los conjuntos A, B y C. Se achuró la unión del conjunto A y C.



$A \cup C$

ii PERO, HAY MAS!!.



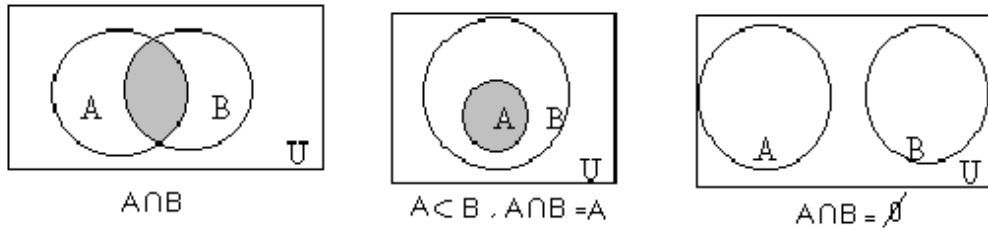
Si, la **Intersección** de los conjuntos A y B se define como el conjunto formado sólo por los elementos que tienen en común A y B.

La intersección se representa por $A \cap B$

Simbólicamente, se escribe:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Gráficamente, lo achurado representa en cada caso la intersección de A y B.

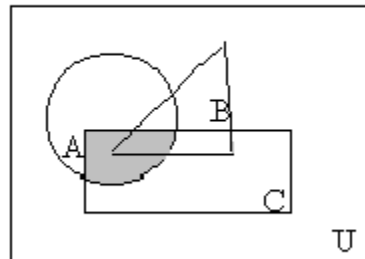


Ejemplo 1:

Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$. El conjunto $A \cap B = \{a\}$ es el conjunto formado por el elemento que se repite, que en este caso es la letra "a".

Ejemplo 2:

En la figura lo achurado representa $A \cap C$



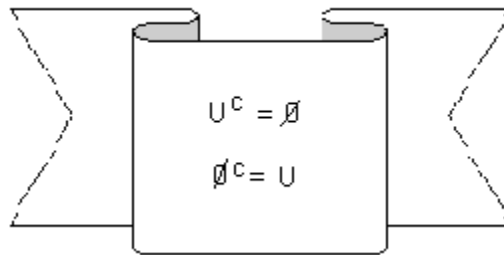
... Porque es lo que te falta para formar un todo.

Se define **Complemento de un conjunto** de la siguiente forma: sea A un conjunto cualquiera, el complemento de A son todos aquellos elementos que están en el Universo, pero que no están en A.

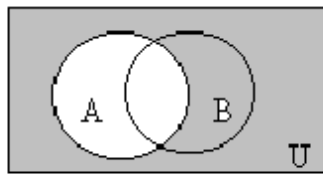
Simbólicamente, se representa por A^c o A'

$$A^c = \{x \in U / x \notin A\}$$

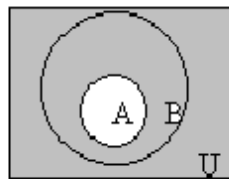
Consecuencias de esta definición



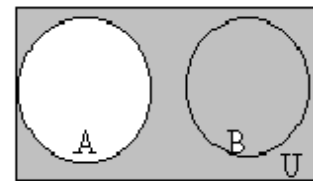
Gráficamente, A^c se representa en lo achurado



A^c

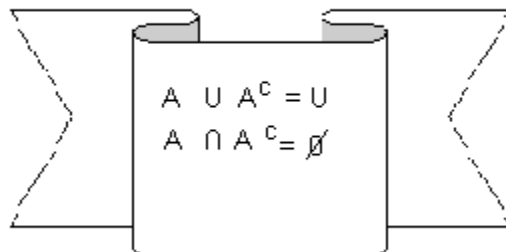


A^c



A^c

Consecuencias de esta definición



Ejemplo 1:

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \in U / x \text{ es un número par}\}$

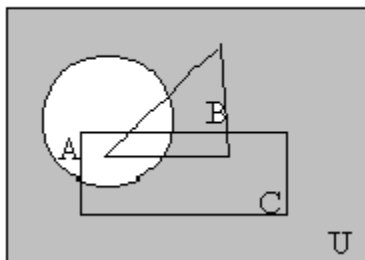
Determine A^c

Respuesta:

El conjunto A está formado por los números pares que están en el conjunto Universo U dado: $A = \{2, 4, 6, 8\}$
Luego, $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, es decir, son todos aquellos elementos que están en el Universo y que no están en A .

Ejemplo 2:

En la figura lo sombreado representa A^c



... Y por último, podemos definir otro concepto.....

La **Diferencia** entre dos conjuntos A y B, la cual se denota por $A - B$, es el conjunto formado por todos los elementos que están en A y no están en B.

La **Diferencia** entre B y A, la cual se denota por $B - A$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en B y no están en A.

Pero ¡¡ OJO !!

$$\boxed{A - B \neq B - A}$$

Por ejemplo:

Dados los conjuntos: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$

La diferencia $A - B = \{1, 3\}$

La diferencia $B - A = \{4, 6\}$

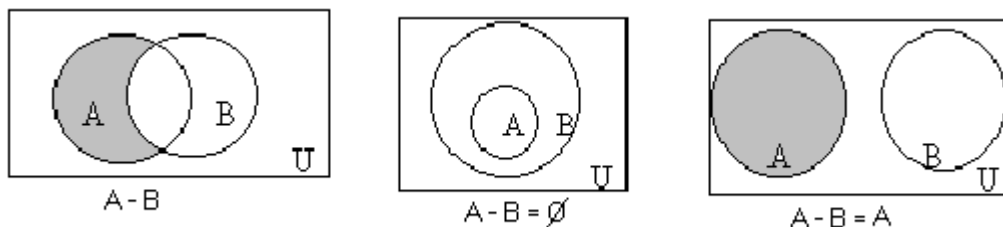
Por lo tanto, $A - B \neq B - A$
 $\{1, 3\} \neq \{4, 6\}$

Simbólicamente:

$$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$$

VIRGINIO GOMEZ

Gráficamente, se representa en lo achurado:



Ejemplo 1:

Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$. Determine $A - B$ y $B - A$

Respuesta

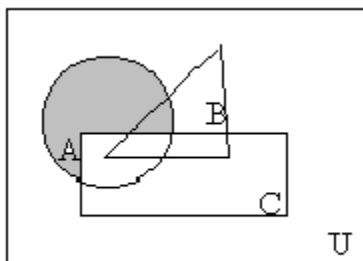
Para determinar la diferencia entre A y B, al conjunto A se le quitan los elementos que tenga de B, lo cual da como resultado la letra "b", es decir, $A - B = \{b\}$

De igual forma se determina el conjunto $B - A = \{c, d\}$

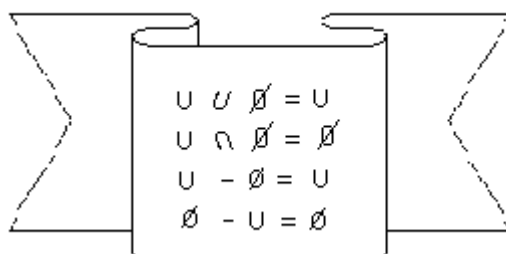
Esto muestra claramente que: $A - B \neq B - A$

Ejemplo 2:

En la figura, lo achurado representa $A - C$



Como consecuencia de estas definiciones, tenemos las siguientes propiedades con respecto al conjunto Universo y al conjunto Vacío:



Ejercicios

1. – Sea el conjunto $U = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 7\}$ y sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U : 3 < x < 7\} & B &= \{x \in U : \text{es divisible por } 2\} \\ C &= \{x \in U : x \text{ mayor que } 4\} & D &= \{0\} \end{aligned}$$

Determinar:

$$\begin{aligned} a) & A \cap B & b) & C \cup A \\ c) & (C \cap A) - B & d) & (D - C^c)^c \\ e) & (A - B)^c - C & f) & [(A^c \cap D) - (C - B^c)] \end{aligned}$$

2. – Sea $U = \{x \in \mathbb{Z} / -1 < x \leq 7\}$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U / x > 2\} \\ B &= \{x \in U / 4 \leq x < 7\} \\ C &= \{x \in U / x \geq 3\} \end{aligned}$$

Encuentre:

$$\begin{aligned} a) & (A \cap B)^c - C & b) & (A \cup B)^c - (C - A) \\ c) & (A \cup C)^c - (A \cap B) & d) & [A - (B - C)]^c \\ e) & (C \cup A) - B^c \end{aligned}$$

3. – Con $A = \{a, b, \{c\}\}$. Encuentre el conjunto Potencia de A

4. – Sean los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7\} \quad B = \{7, 8, 9\} \quad C = \{1, 2, 3, 4\}$$

¿Es verdad que:

$$\begin{aligned} a) & (A - (A - B))^c = A^c \cup B^c & b) & (A \cap C) - (A - B) \subseteq A \\ c) & (A \cup B) - (B \cap A^c) = A \end{aligned}$$

5. – Sea $U = \mathbb{R}$ y sean:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in U : x < 10\} & B &= \{x \in U : -3 \leq x < 3.5\} \\ C &= \{x \in U : x > 0 \vee x < -3\} \end{aligned}$$

Determinar :

$$\begin{aligned} a) & A^c \cup B & b) & (B - A) \cap C^c \\ c) & (A - C)^c \cup B & d) & [A - (B - C)]^c \end{aligned}$$

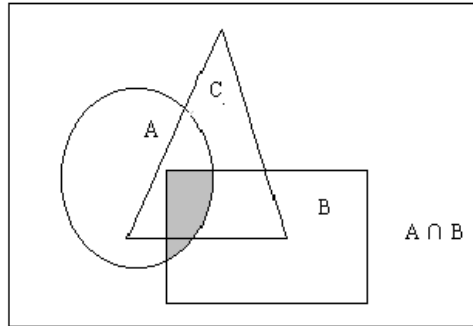
VIRGINIO GOMEZ

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplo:

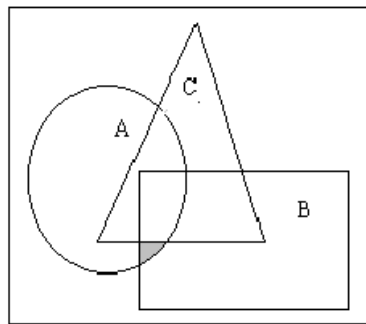
Achurar la solución de $(A \cap B) - C$

i) Primero achuramos $A \cap B$, como se ve en la figura



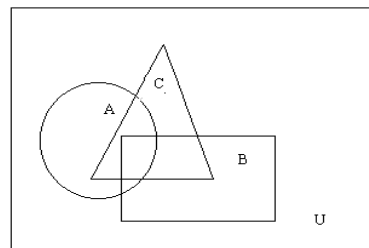
ii) Luego, a la figura achurada le quitamos C

$(A \cap B) - C$



Ejercicios

Achure lo que se pide en cada ejercicio, en la figura dada:



a) $(A - C) - B$

b) $(A \cup B)^c$

c) $A - (B \cap C)^c$

d) $A^c - (B \cap A)^c$

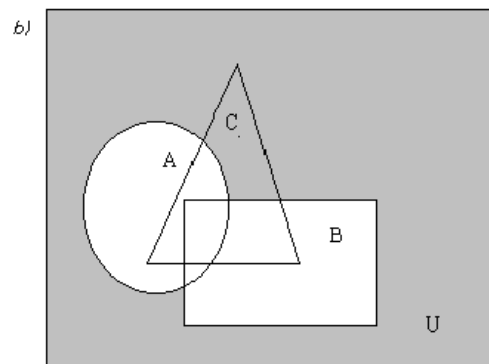
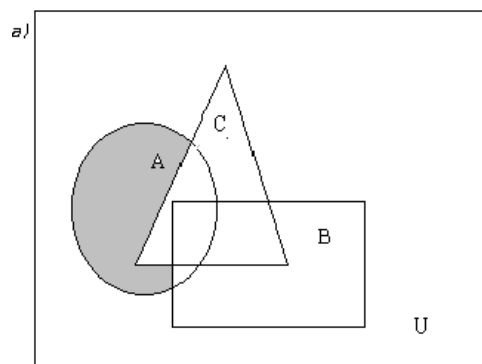
e) $(A \cap B)^c - (C \cap B)$

f) $B \cup (A - C^c)$

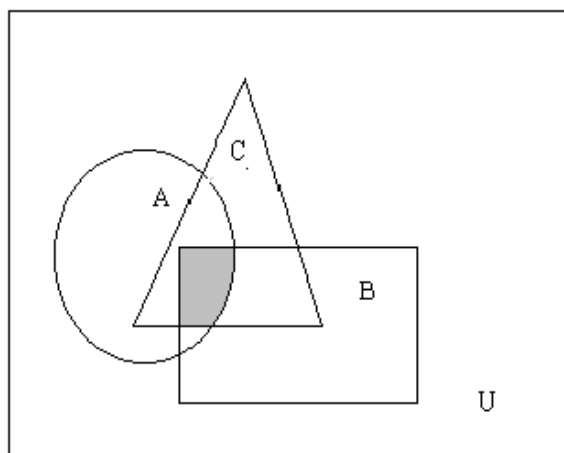
g) $(A \cap B \cap C) - A$

VIRGINIO GOMEZ

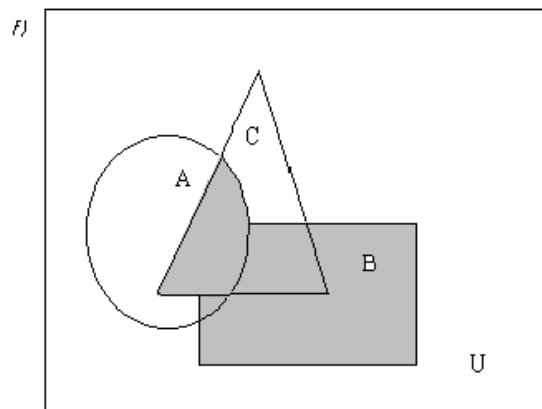
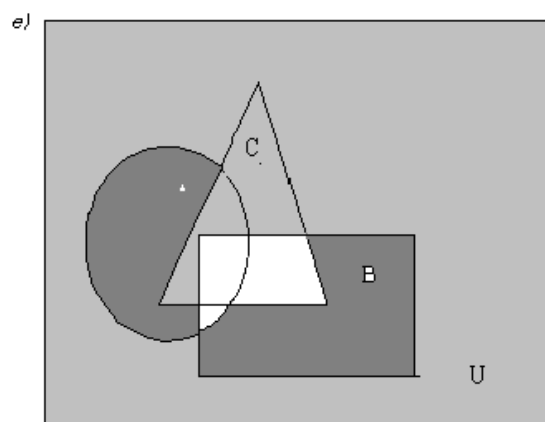
Respuesta



c)



d) \emptyset



g) ϕ

Los conjuntos también cumplen ciertas reglas, las cuales rigen a sus operaciones. A continuación se da una lista de estas reglas o propiedades y luego unos ejercicios en los cuales serán utilizadas éstas con la forma de resolución.



Propiedades de los Conjuntos

Sean tres conjuntos cualesquiera A, B y C:

1) Asociatividad

- a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2) Conmutatividad

- a) $A \cup B = B \cup A$
- b) $A \cap B = B \cap A$

3) Distributividad

- a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) De Morgan

- a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

5) Absorción

- a) $A \cup (A \cap B) = A$
- b) $A \cap (A \cup B) = A$

6) No Idempotencia

- a) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- b) $A \cup \emptyset = A$
- c) $A \cap U = A$
- d) $A \cup U = U$
- e) $A \cap A^c = \emptyset$
- f) $A \cup A^c = U$

7) Involución

$$(A^c)^c = A$$

8) **Diferencia**

a) $A - B = A \cap B^c$

9) **Idempotencia**

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup A = A$

Para resolver ejercicios en los cuales se usan las propiedades, conviene desarrollar el lado de la expresión que presenta mayor dificultad justificando cada paso.

Ejemplo 1:

Usando las propiedades dadas, demostrar que:

$$A = A - (A^c - B)$$

Respuesta:

Desarrollaremos la segunda parte de la expresión para llegar a la primera parte:

$$\begin{array}{ll} A - (A^c - B) & \\ A \cap (A^c - B)^c & \text{De Morgan} \\ A \cap [(A^c)^c \cup (B^c)^c] & \text{De Morgan} \\ A \cap (A \cup B) & \text{Involución} \\ A & \text{Absorción} \end{array}$$

Luego: $A - (A^c - B) = A$

Ejemplo 2:

Usando las propiedades dadas demuestre que $(A \cup B) - (B \cap A^c) = A$

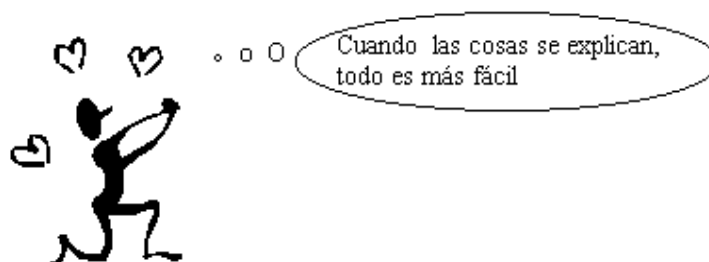
Respuesta

Desarrollaremos la primera parte de la expresión para llegar a la segunda parte:

$$\begin{array}{ll} (A \cup B) - (B \cap A^c) & \\ (A \cup B) \cap [(B \cap A^c)]^c & \text{De Morgan} \\ (A \cup B) \cap [B^c \cup (A^c)^c] & \text{De Morgan} \\ (A \cup B) \cap (B^c \cup A) & \text{Involución} \\ A \cup (B \cap B^c) & \text{Distributividad} \\ A \cup \phi & \text{No Idempotencia} \\ A & \text{No Idempotencia} \end{array}$$

Luego: $A = (A \cup B) - (B \cap A^c)$

VIRGINIO GÓMEZ

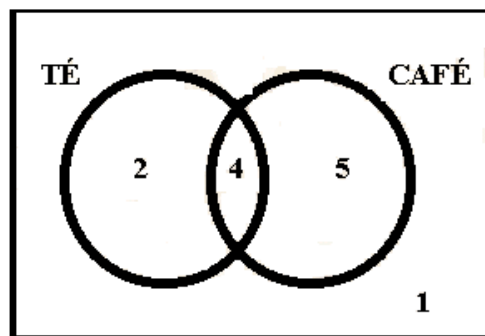


¿ Y puedo aplicar todo esto en algún problema real ?

Si, los Problemas con enunciados son un buen ejemplo de la utilización de las operaciones de conjuntos. Para resolverlos, el lenguaje cotidiano es transformado a lenguaje matemático.

Ejemplo 1

En el diagrama que colocamos a continuación, se han volcado los datos obtenidos en una encuesta, realizada a personas, a las que se les preguntó si tomaban té o café. Los números que aparecen se refieren a las cantidades de personas que respondieron a la pregunta en las diversas formas posibles: *solamente té, té y café, ninguna de las dos bebidas, etc.*



Observe las preguntas y sus respectivas respuestas

- 1) ¿Cuántas personas tomaban té? Rta. 6 personas.
- 2) ¿Cuántas personas tomaban café? Rta. 9 personas.
- 3) ¿Cuántas personas tomaban té y café? Rta. 4 personas.
- 4) ¿Cuántas personas no tomaban ninguna de las dos bebidas? Rta. 1 persona.
- 5) ¿Cuántas personas no tomaban té? Rta. 6 personas.
- 6) ¿Cuántas personas no tomaban café? Rta. 3 personas.
- 7) ¿Cuántas personas tomaban por lo menos una de esas dos bebidas? Rta. 11 personas.
- 8) ¿Cuántas personas tomaban sólo una de esas dos bebidas? Rta. 7 personas.
- 9) ¿Cuántas personas tomaban sólo café? Rta. 5 personas.
- 10) ¿Cuántas personas tomaban alguna de esas bebidas? Rta. 11 person

Ejemplo 2

En una encuesta realizada a 62 consumidores de comida rápida se revela que: 10 comen sólo papas fritas y hamburguesas, 12 comen sólo completos, 4 comen sólo papas fritas, 3 comen los tres tipos de alimentos, 33 comen al menos dos de estos tipos de comida y 25 comen papas fritas. Si todos nombran alguna de las alternativas, encuentre:



- a) ¿Cuántas personas comen completos y hamburguesa?
- b) ¿Cuántas personas comen sólo completos?
- c) ¿Cuántas personas comen exactamente dos tipos de esta comida?

Respuesta:

Se designa cada conjunto del problema con una letra mayúscula convenientemente. Llamaremos U al conjunto universo el cual está formado por el total de consumidores de Comida Rápida dados en el problema, los cuales son 62, P será el conjunto de consumidores de Papas Fritas, H el conjunto de consumidores de Hamburguesas y C los consumidores de Completos. Esto en notación conjuntista es:

$$\begin{aligned}U &= \{x / x \text{ consumidores de Comida Rápida}\} \\P &= \{x \in U / x \text{ consumidores de Papas Fritas}\} \\H &= \{x \in U / x \text{ consumidores de Hamburguesa}\} \\C &= \{x \in U / x \text{ consumidores de Completos}\}\end{aligned}$$

Las 10 personas que consumen **sólo** Papas Fritas y Hamburguesas indica que no consumen Completos, es decir, es $(P \cap H) - C = 10$

Los 12 consumidores de Completos no consumen ninguna de las otras comidas rápidas, **sólo** Completos, es decir, $C - (P \cup H)$

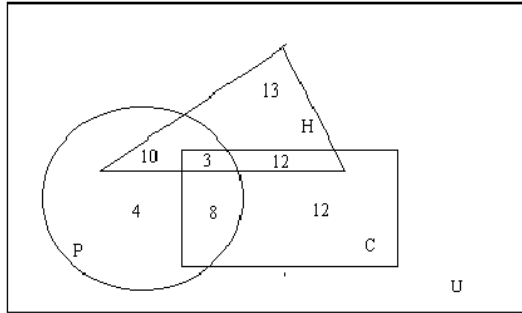
Los 4 consumidores de **sólo** Papas Fritas tampoco consumen las otras comidas rápidas, es decir, $P - (H \cup C)$.

Las 3 personas que consumen los tres tipos de comidas están dados por la solución del conjunto $(P \cap H \cap C)$

Las 33 personas que consumen al menos dos de los tres tipos de comida rápida significa que consumen como **mínimo** dos tipos distintos, es decir,
 $(P \cap H) \cup (H \cap C) \cup (P \cap C) \cup (P \cap H \cap C) = 13$

Los 25 consumidores de Papas Fritas también son consumidores de Hamburguesas y Completos, es decir, es todo el conjunto P.

Completaremos la información en la figura dada a continuación:



Las respuestas al problema planteado son:

- a) $C \cap H = 15$
15 personas comen completos y hamburguesas.
- b) $C - (P \cup H) = 12$
12 personas comen sólo completos.
- c) $[(P \cap H) - C] \cup [(H \cap C) - P] \cup [(P \cap C) - H] = 30$
30 personas comen exactamente dos tipos de esta comida.

Problemas con enunciados

1. — En una investigación a mil estudiantes de un Instituto se determinó que 720 tenían cassettes, 670 poseían CD y 540 tenían ambas cosas. Determinar:
 - a) ¿Cuántos estudiantes tienen cassettes o CD?
 - b) ¿Cuántos estudiantes no tienen cassettes ni CD?
 - c) ¿Cuántos estudiantes tienen sólo CD?
 - d) ¿Cuántos estudiantes tienen sólo cassettes?
2. — Se investigó un grupo de 5500 personas en relación con la estrategia a seguir con objeto de conservar el combustible. De éstas, 2000 opinaron que lo aceptable era el racionamiento, 1500 dijeron que lo apropiado sería fijar un impuesto adicional por litro, y 750 personas indicaron que lo apropiado sería la aplicación de ambos procedimientos. El resto de las personas no aceptan ninguno de los dos sistemas. Determinar:
 - a) Un diagrama de Venn, que resuma lo anterior.
 - b) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el racionamiento pero no el impuesto?
 - c) ¿Cuántas personas aceptarían en forma voluntaria el impuesto, pero no el racionamiento?
 - d) ¿Cuántas personas no aceptarían en forma voluntaria ninguno de los dos cursos de acción?

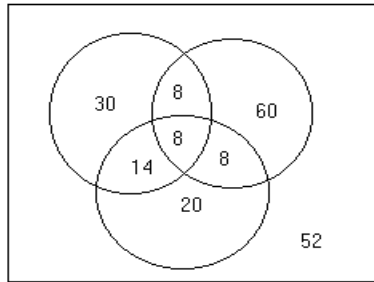
3. — En una elección de directorio de una empresa asistieron 595 de un universo de 703 accionistas. Según los estatutos de la empresa cada accionista recibe una papeleta con los nombres de todos los candidatos y en donde el accionista marcará, si lo desea, hasta dos preferencias. De los resultados de la elección se determinó la siguiente información referente a las tres primeras mayorías.
El candidato A obtuvo 324 preferencias, 47 de los accionistas sólo votaron por A, 203 votaron por A y no por B, 164 votaron por C y B, 358 votaron por C y 42 votaron sólo por B. Determinar:
- ¿Quién obtuvo la primera mayoría?
 - ¿Quién obtuvo la segunda mayoría?
 - ¿Cuántos votaron por dos candidatos?
 - De todos los asistentes, ¿cuántos no votaron por C?
 - ¿Cuántos sólo votaron por C?
 - ¿Cuántos de los asistentes no votaron por ninguno de los tres?
 - ¿Cuántos accionistas no se hicieron presente?
 - ¿Cuántos accionistas votaron por los tres candidatos?
4. — De una encuesta a 200 personas que compran pasta de dientes 80 compran Pepsodent, 60 compran solamente Odontine, 20 compran solamente Signal, 14 compran Pepsodent y Odontine, 20 compran Odontine y Signal, 12 compran Pepsodent y Signal y 10 compran todos. El resto compra otra marca.
- ¿Cuántos compran al menos una de estas marcas?
 - ¿Cuántos no compran estos dentríficos?
 - ¿Cuántos compran solamente Pepsodent?
 - ¿Cuántos compran Signal?
 - ¿Cuántos no compran Odontine?
 - ¿Cuántos compran Signal u Odontine?
5. — Se realizó una encuesta a 200 alumnos de Ingeniería en Ejecución en diversas disciplinas acerca de la forma en que ocupaban su tiempo libre, 30 dicen que sólo leen, 60 dicen que sólo escuchan música, 20 dicen que sólo estudian, 16 dicen que leen y escuchan música, 50 dicen que estudian, 16 dicen que escuchan música y estudian y 8 hacen las tres cosas . De acuerdo a la encuesta, responda las preguntas dadas:
- Grafique la información.
 - ¿Cuántos sólo leen o estudian?
 - ¿De los que opinan, cuántos dicen que no leen?
 - ¿Cuántas personas no contestan alguna de estas tres alternativas?
 - ¿Cuántas personas escuchan música, pero no leen?
 - ¿Cuántas personas estudian y escuchan música, pero no leen?
- 6) Un grupo de jóvenes fue entrevistado acerca de sus preferencias por ciertos medios de transporte (bicicleta, motocicleta y automóvil). Los datos de la encuesta fueron los siguientes: Motocicleta solamente: 5, Motocicleta: 38, No gustan del automóvil: 9, Motocicleta y bicicleta, pero no automóvil: 3, Motocicleta y automóvil pero no bicicleta: 20, No gustan de la bicicleta: 72, Ninguna de las tres cosas: 1, No gustan de la motocicleta: 61 .
- ¿Cuál fue el número de personas entrevistadas?
 - ¿A cuántos le gustaba la bicicleta solamente?
 - ¿A cuántos le gustaba el automóvil solamente?

- VIRGINIO GOMEZ

A Venn diagram with two overlapping circles. The left circle is labeled with '1250' in its non-overlapping region. The right circle is labeled with '750' in its non-overlapping region. The intersection of the two circles is labeled with '750'. To the right of the right circle, the number '2750' is written, representing the total for that set.

- 59

5. — d) 42 e) 116 f) 106
 a)

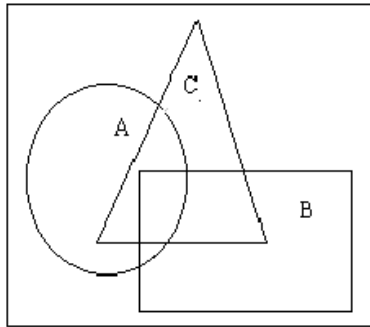


- b) 64 c) 88 d) 52
e) 68 f) 8
- 6) 1) 99 personas. 2) ninguna.
 3) 46 personas. 4) 10 personas.
 5) 14 personas.
- 7) a) 9 días; b) 6 días; c) 11 días.

VIRGINIO GOMEZ

AUTOEVALUACION

- 1) Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de tres productos A, B y C : 5 personas consumían sólo A, 25 personas consumían sólo B, 10 personas consumían sólo C, 15 personas consumían A y B, pero no C, 80 personas consumían B y C, pero no A, 8 personas consumían C y A, pero no B, 17 personas no consumían ninguno de los tres productos.
- ¿Cuántas personas consumían A?
 - ¿Cuántas personas consumían B?
 - ¿Cuántas personas consumían C?
 - ¿Cuántas personas consumían A, B y C?
 - ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?
 - ¿Cuántas personas consumían A o B?
 - ¿Cuántas personas no consumían C?
 - ¿Cuántas personas no consumían ni C ni A?
- 2) Dada la siguiente figura, achure lo que se pide



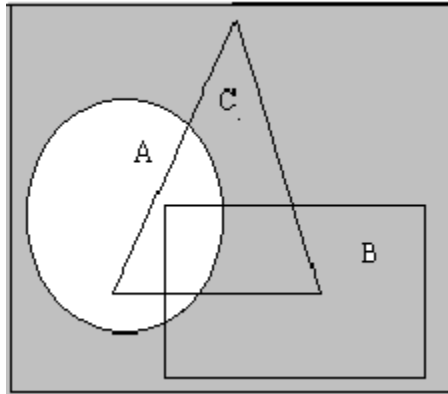
$$A^C - [(C \cap A) - (B \cup A^C)]$$

- 3) Demuestre que, Justifique cada paso
- $$(A - B) - B^C = \emptyset$$
- 4) Sea $A = \{\emptyset, 0\}$. Determine si las siguientes proposiciones son V o F
- $\{0\} \subseteq P(A)$
 - $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$
 - $\emptyset \subseteq P(A)$
 - $\{\emptyset\} \in P(A)$
 - $0 \in A$

Respuestas

- 1)
- | | |
|------------------|------------------|
| a) 68 personas. | b) 160 personas. |
| c) 138 personas. | d) 40 personas. |
| e) 183 personas. | f) 173 personas. |
| g) 62 personas. | h) 42 personas. |

2)



3)

$$\begin{aligned} (A - B) - B^C &= \emptyset \\ (A \cap B^C) - B^C & \\ (A \cap B^C) \cap B & \\ A \cap (B^C \cap B) & \\ A \cap \emptyset & \\ \emptyset & \end{aligned}$$

Diferencia
Diferencia
Asociatividad
No Idempotencia
No Idempotencia

4)

a) V
c) V
f) V

b) F
d) V

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO III

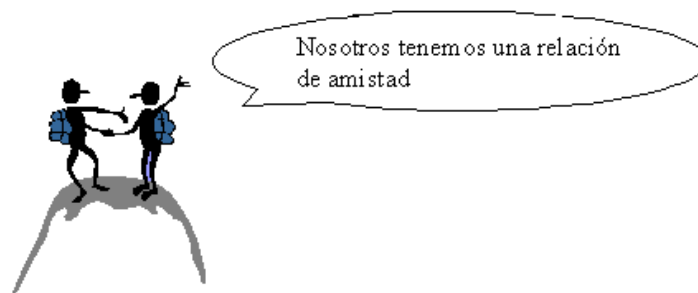
RELACIONES Y FUNCIONES

VIRGINIO GOMEZ

RELACIONES Y FUNCIONES

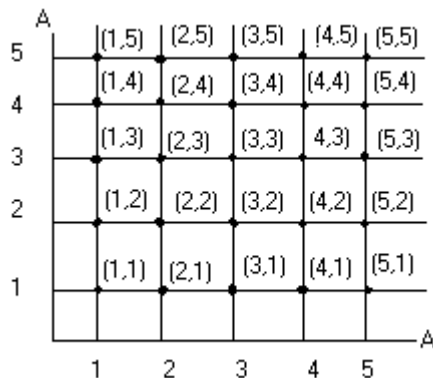
Uno de los aspectos más importantes en la ciencia es establecer relaciones entre varios tipos de fenómenos. Una vez que se conoce la relación es posible hacer predicciones.

Por ejemplo, a un economista le gustaría ser capaz de predecir las tasas de interés, un ingeniero puede usar una fórmula para predecir las desviaciones de una viga sujeta a diferentes cargas.



Veamos particularmente qué ocurre con la matemática.

Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la representación gráfica del producto $A \times A$ que se llama **Producto Cartesiano**, y se lee "A cruz A" se hace mediante un diagrama cartesiano, como se ve en la figura:



Cada elemento de $A \times A$ es un par ordenado de la forma (a, b)

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CARTESIANO

Para todo A, B y C conjuntos cualquiera se tiene:

1) **Asociatividad**

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

2) **Distributividad**

i) Respecto de la Intersección

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

ii) Respecto de la Unión

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

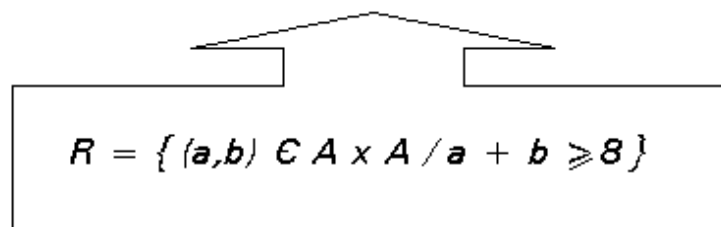
3) **El Producto Cartesiano No es Conmutativo**

$$A \times B \neq B \times A$$

Volvamos al ejercicio anterior:

Suponga que de todos los puntos de $A \times A$ sólo necesitamos a aquellos que cumplen la siguiente condición:

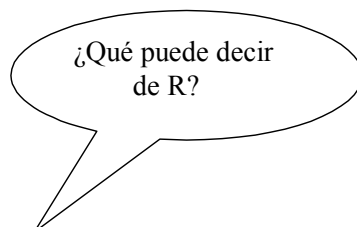
"La suma de sus componentes es 8 o mayor que 8", en lenguaje matemático decimos:


$$R = \{ (a,b) \in A \times A / a + b \geq 8 \}$$

$$A \times A = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), \right. \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), \\ \left. (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) \right\}$$

Es decir, los siguientes pares cumplen con R :

$$R = \{ (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5) \}$$

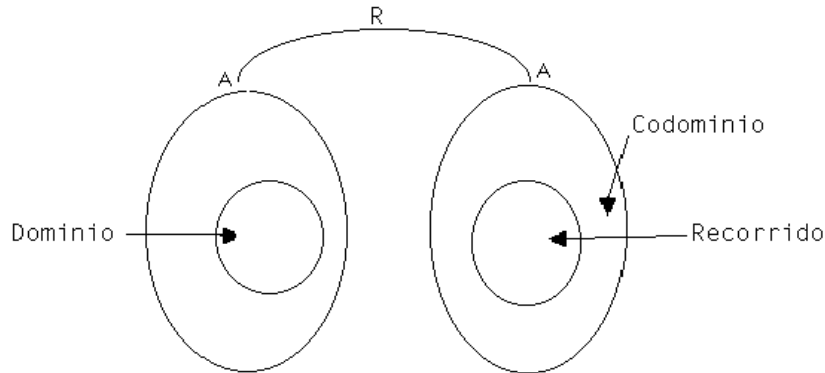


Si observa, R es un **subconjunto** de $A \times A$, es decir, que también es un conjunto de pares ordenados y que además cumplen una condición.

Vamos a llamar a R , **Relación Binaria**, la cual definiremos de la siguiente forma:

RELACION
1.- Una Relación es una correspondencia entre un primer conjunto llamado DOMINIO y un segundo conjunto llamado CODOMINIO de modo que a cada elemento del dominio corresponde uno o más elementos del CODOMINIO.
2.- Una Relación, en general, es cualquier conjunto de pares ordenados de números reales.

Esto se representa graficamente en la figura :



Si (a, b) es un elemento de $A \times A$ y $(a, b) \in R$, entonces lo escribimos:

$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

Si el par (a, b) no está en la relación, entonces:

$$a \not R b \Leftrightarrow (a, b) \notin R$$

Ejemplo de Relaciones:

- a) Correspondencia o relación entre el nombre de un estudiante y su número de matrícula.
- b) Correspondencia o relación entre el nombre de un estudiante y las materias que cursa
- c) Correspondencia o relación entre el nombre de un estudiante y su calificación en el PrimerSemestre
- d) Correspondencia o relación entre el nombre de un estudiante y su número de teléfono

Ejercicios

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, determine las siguientes relaciones:

$$1) R_1 = \{ (a, b) \in A \times A / a \leq b \}$$

$$2) R_2 = \{ (a, b) \in A \times A / a > b \}$$

$$3) R_3 = \{ (a, b) \in A \times A / a + 1 = b \}$$

$$4) R_4 = \{ (a, b) \in A \times A / a + 2 \leq 3 \}$$

$$5) R_5 = \{ (a, b) \in A \times A / a = 1 \}$$

$$6) R_6 = \{ (a, b) \in A \times A / b = 4 \}$$

Respuesta

$$1) R_1 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3) \}$$

$$2) R_2 = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2) \}$$

$$3) R_3 = \{ (1, 2), (2, 3) \}$$

$$4) R_4 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3) \}$$

$$5) R_5 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3) \}$$

$$6) \emptyset$$

Representación Gráfica

Generalmente una relación se representa por el *Método de la flecha*, en forma de tabla, como conjunto de pares ordenados, en forma gráfica o en forma de Ecuación.

El primero como su nombre lo dice se traza una flecha del dominio al Codominio.

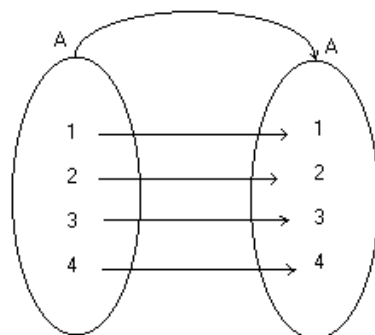
En forma de tabla se escribe el dominio en la primera columna y el Codominio en la segunda.

Como conjunto de pares ordenados de números reales, se escribe el conjunto de puntos separados por una coma.

Y en forma gráfica, se marcan los correspondientes puntos del conjunto en el plano cartesiano ésta recibe el nombre de gráfica de la relación.

Ejemplo: Forma de Flechas

$$\text{Sea } A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } R = \{ (a, b) \in A \times A / a = b \}$$



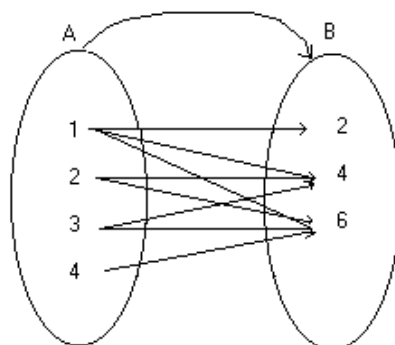
Esta forma de diagrama indica que la Relación es una Correspondencia de A en A.

Una relación R de un conjunto A sobre el conjunto A también se puede escribir como:

$$R : A \rightarrow A$$

Suponga otra relación R que va de un conjunto A a un conjunto B, como el siguiente ejemplo:

$$R : A \rightarrow B$$



La Relación R es: $R = \{ (a, b) \in R / a < b \}$

y los pares que la forman son:

$$R = \{ (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (4, 6) \}$$

El conjunto A se llama de **PARTIDA**

El conjunto B se llama de **LLEGADA**

Se llama **DOMINIO** de la relación al conjunto de los elementos de A que están relacionados con los de B, son los **primeros elementos** del par ordenado.

Ejemplo 1: En la relación R el Dominio es el conjunto:

$$\text{Dom } R = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

Se llama **RECORRIDO** de la relación R al conjunto de aquellos elementos de B con los que se han relacionados los elementos de A, son los **segundos elementos** del par ordenado.

Ejemplo 2: En la Relación R el Recorrido es el conjunto:

$$\text{Rec } R = \{ 2, 4, 6 \}$$

Ejercicios

I) Determine el Dominio y Recorrido de las siguientes relaciones:

1) $R_1 = \{ (1, 2), (2, 3) \}$

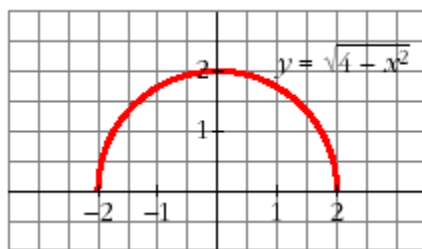
2) $R_2 = \{ (a, b), (a, c), (a, d) \}$

3) $R_3 = \{ (1, 2), (2, 1) \}$

4) $R_4 = \{ (1, 1), (2, 3), (2, 4) \}$

5) $R_5 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$

II) La gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ es una semicircunferencia con centro en el origen y radio 2, como se ve en la figura. ¿Cuál es su dominio?



Respuesta

- I)
- 1) $Dom R_1 = \{1, 2\}$ $Rec R_1 = \{2, 3\}$
 - 2) $Dom R_2 = \{a\}$ $Rec R_2 = \{b, c, d\}$
 - 3) $Dom R_3 = \{1, 2\}$ $Rec R_3 = \{1, 2\}$
 - 4) $Dom R_4 = \{1, 2\}$ $Rec R_4 = \{1, 3, 4\}$
 - 5) $Dom R_5 = \{1, 2, 3, 4\}$ $Rec R_5 = \{1, 2, 3, 4\}$
- II) $[-2, 2]$

Observación: Para los ejercicios que desarrollaremos a continuación usaremos el par (x, y) en vez del (a, b) usado anteriormente.

Una relación también puede describirse enunciando una regla que defina la correspondencia entre x e y , si no se especifica ninguna restricción para el dominio, entonces se supone que es el conjunto de todos los números reales (\mathbb{R}) para los que el par (x, y) es real.

Ejemplo:

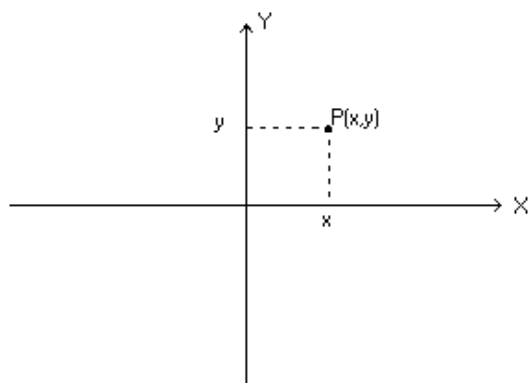
$$R = \{(x, y) / y = x + 5\}$$

Otra forma de representar graficamente una relación es a través de un **Plano Cartesiano**.

Plano Cartesiano

El Plano Cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares entre sí llamada cada una Eje, y que se intersectan en un par común llamado Origen, el cuál es $(0, 0)$.

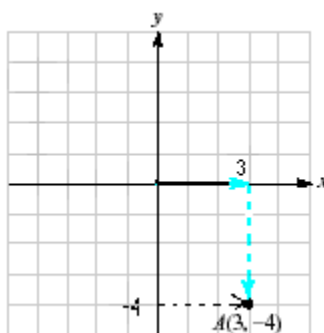
Cada par (x, y) se llama Punto (x, y) .



El eje de las abscisas es la recta Horizontal

El eje de las Ordenadas es la recta Vertical

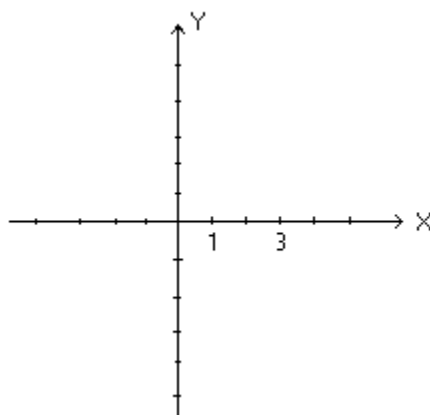
Ejemplo: En el siguiente ejemplo graficaremos el punto $P(3, -4)$



Ejercicios

Marque los siguientes puntos en el plano cartesiano dado:

- A (1, -1)
- B (-3, 0)
- C (-2, 2)
- D (0, -2)



ALGUNAS RELACIONES IMPORTANTES

Veámos cómo se grafican algunas relaciones en \mathbb{R} .

Ejemplo:

Grafique la relación:

$$R = \{ (x, y) / y = \frac{-3}{4}x - 3 \}$$

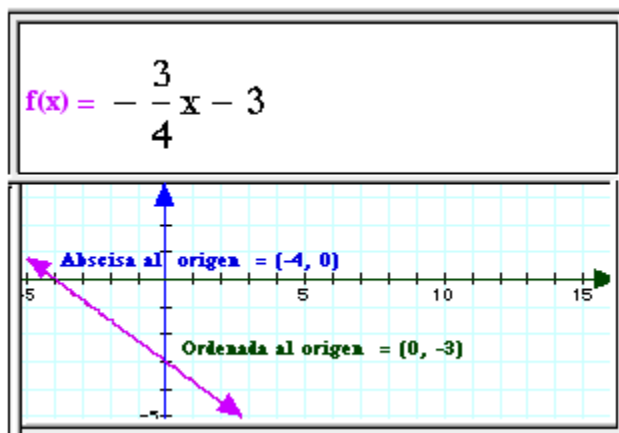
Respuesta

Esta Relación representa todos los puntos en \mathbb{R} que cumplen la condición $y = -\frac{3}{4}x - 3$. Para graficar la Relación **sólo es necesario asignar dos valores arbitrarios** a x y reemplazarlos en la relación (para este tipo de relación, es más práctico asignar los valores $x = 0$ e $y = 0$). Con esto obtenemos dos puntos, los cuáles unimos con una línea continua, obteniendo así la LINEA RECTA.

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 0, & \quad y = -3 \\ \text{Si } y = 0, & \quad x = -4 \end{aligned}$$

Dos pares de la relación son $P_1(0, -3)$ y $P_2(-4, 0)$

La gráfica resultante es una LINEA RECTA.



Ejercicios

Grafique

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $R_1 = \{(x, y) / y = -\frac{1}{2}x + 4\}$ | c) $R_2 = \{(x, y) / 2y + x = 4\}$ |
| b) $R_1 = \{(x, y) / y = 2x - 1\}$ | e) $R_4 = \{(x, y) / 2y - x = 3\}$ |
| d) $R_3 = \{(x, y) / y - x = 0\}$ | |

f) $R_5 = \{ (x, y) / 1 = 2y + x \}$

Respuesta

a)

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

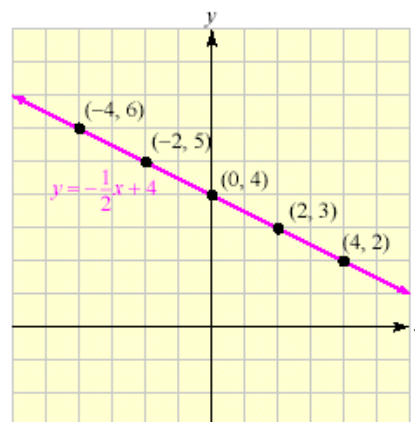
$$y = -\frac{1}{2}(-4) + 4 \quad -4 \text{ se sustituye por } x$$

$$y = 2 + 4$$

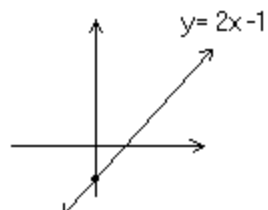
$$y = 6$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

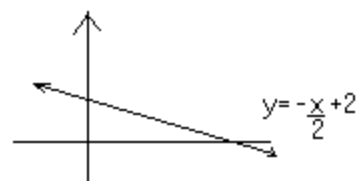
x	y
-4	6
-2	5
0	4
2	3
4	2



b)



c)



d)

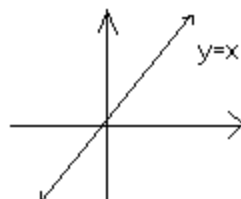


GRAFICO DE OTRAS RELACIONES

Existen muchas relaciones que tienen otras formas.

Por ejemplo

$$: \quad R = \{(x, y) / y = ax^2 + bx + c\} \quad R = \{(x, y) / x = ay^2 + by + c\}$$

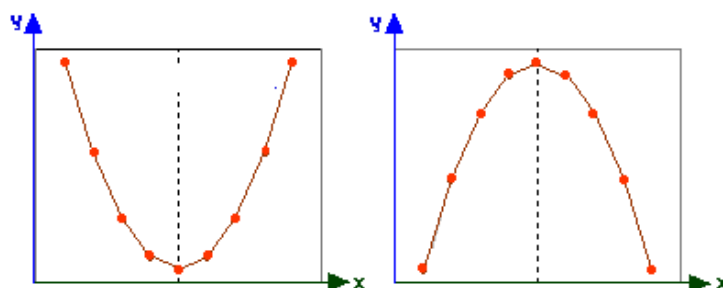
Ambas relaciones al representarlas gráficamente generan una Parábola.

Analizaremos los dos tipos:

1)

$$R = \{(x, y) / y = ax^2 + bx + c\}$$

La gráfica de una función cuadrática de ésta forma es una parábola que se abre hacia abajo o hacia arriba, como se muestra a continuación :



Una forma de graficarla es asignando **varios** valores a x para así obtener y , lo cual es poco práctico de hacer. Otra forma es considerando los siguientes puntos:

1) Eje de simetría

El gráfico de relaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$, tienen un Eje de Simetría, el cual es una recta **paralela al eje y** o el eje y que se obtiene al resolver la expresión: $y = -\frac{b}{2a}$

2) Análisis de concavidad

Si el valor de $a > 0$, entonces el gráfico es **cóncavo hacia arriba**.

Si el valor de $a < 0$, entonces el gráfico es **cóncavo hacia abajo**.

3) Intersección con el eje X

Para determinar los puntos que intersectan al eje x , se utiliza la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De aquí obtenemos los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$

4) **Intersección con el eje Y**

Determinamos la ordenada (que corta al eje y), cuando $x = 0$, y así obtenemos el punto $(0, y)$.

5) **Vértice**

Determinamos el vértice de la parábola a través de la expresión:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, y \right)$$

El valor de y se obtiene al reemplazar el valor encontrado en $x = -\frac{b}{2a}$ en la expresión original obteniendo así y .

Ejemplo 1:

Grafique la relación $R = \{ (x, y) / y = x^2 - 4x + 3 \}$

Respuesta

1) **El eje de simetría** es paralelo al eje y : $x = 2$

2) $a = 1$, es decir, se cumple $a > 0$, por lo tanto, la parábola es **cóncava hacia arriba**.

3) Para esta relación, tenemos que $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$, reemplazamos en la ecuación cuadrática:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4(3)}}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4(3)}}{2} = 1$$

Por lo tanto, **los puntos son $(3, 0)$ y $(1, 0)$**

4) Veamos la intersección con el eje y (cuando $x = 0$):

$$y = x^2 - 4x + 3 = 0^2 - 0 + 3 = 3$$

Luego, el punto es: **$(0, 3)$**

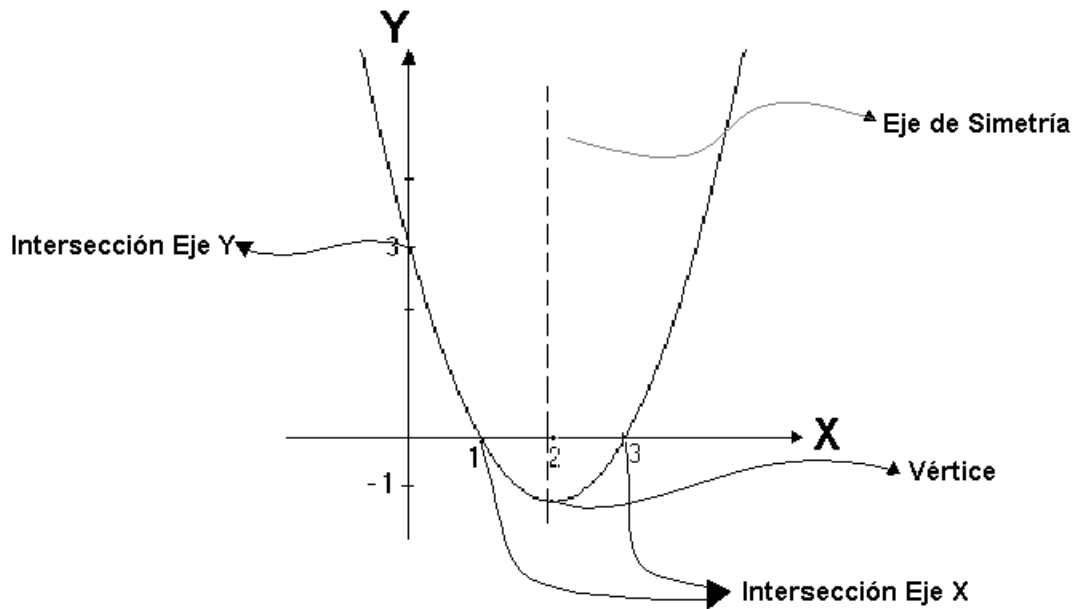
5) El vértice es: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$

$$y = 2^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Por lo tanto, **$V = (2, -1)$**

Considerando todos estos valores tenemos la gráfica de la relación:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

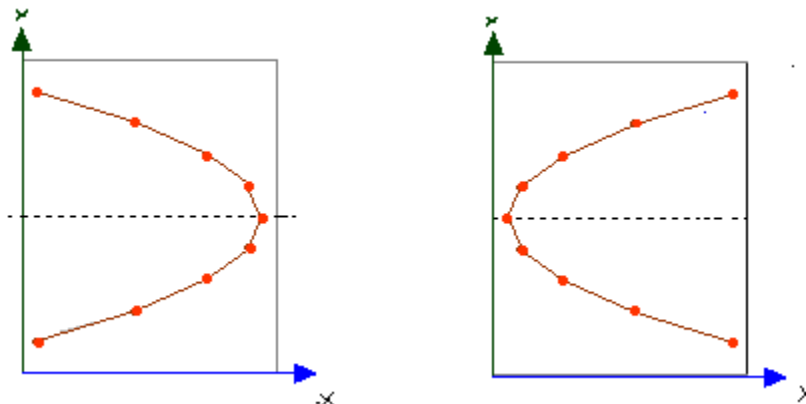


II)

Estudiemos la relación que presenta la siguiente forma:

$$R = \{(x, y) / x = ay^2 + by + c\}$$

La gráfica de una función cuadrática de ésta forma es una parábola que se abre hacia la derecha o hacia la izquierda, como se muestra a continuación :



1) **Eje de Simetría**

El gráfico de esta relación también es una parábola, sólo que su **eje de simetría es el eje x , una recta paralela al eje x** , y que se obtiene al resolver $x = -\frac{b}{2a}$

2) **Análisis de Concavidad**

Si $a > 0$, la parábola es **cóncava hacia la derecha**.

Si $a < 0$, la parábola es **cóncava hacia la izquierda**.

3) **Intersección con el eje Y**

Para determinar los puntos que cortan al eje y se resuelve la ecuación cuadrática:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los puntos que se obtienen son $(0, y_1)$ y $(0, y_2)$

4) **Intersección con el eje X**

Determinamos el punto que corta al eje x , cuando $y = 0$, es decir, el punto $(x, 0)$

Vértice

5) Determinamos el vértice de la parábola a través de la expresión:

$$V = \left(x, -\frac{b}{2a} \right)$$

El valor de x se obtiene al reemplazar el valor encontrado en $y = -\frac{b}{2a}$ en la expresión original obteniendo así x .

Ejemplo 2:

Grafique la relación $R = \{ (x, y) / x = y^2 - 8y + 15 \}$

Respuesta

Del ejemplo, se tiene:

- 1) El **eje de simetría** es paralelo al eje x : $y = 4$
- 2) $a = 1 > 0$, entonces **la parábola es cóncava hacia la derecha**.
- 3) $a = 1$, $b = -8$, $c = 15$

$$y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(15)}}{2}$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = 5$$

Por lo tanto, los puntos son **(0, 3) y (0, 5)**

- 4) En la expresión: $x = y^2 - 8y + 15$ reemplazamos $y = 0$ obteniéndose:

$$x = 0^2 - 8(0) + 15 = 15$$

Luego, el punto de intersección con el eje x es: **(15, 0)**

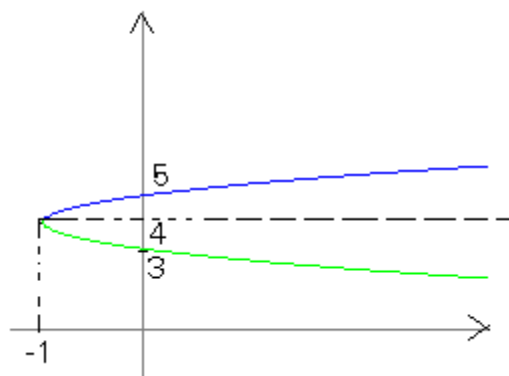
- 5) Del ejemplo, obtenemos que el vértice es:

$$y = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x = 4^2 - 8(4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$$

Por lo tanto, **$V = (-1, 4)$**

Luego, la gráfica de la relación $x = y^2 - 8y + 15$ es:

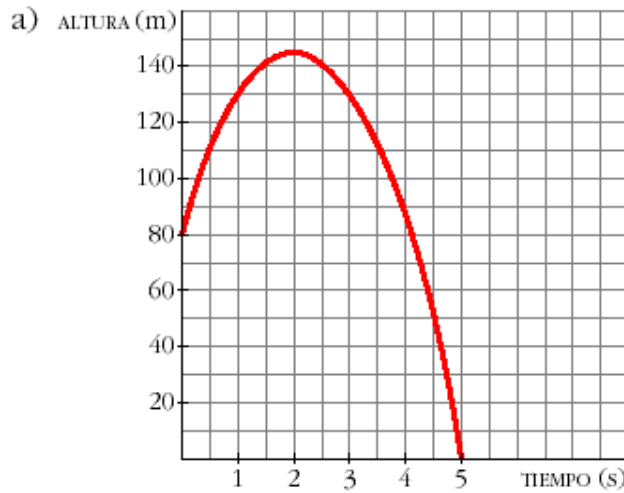


Problema de Aplicación

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).

- a) Dibuja la gráfica en el intervalo $[0, 5]$.
- b) Halla la altura del edificio.
- c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

Respuesta



b) 80 metros.

c) 2 segundos.

Ejercicios

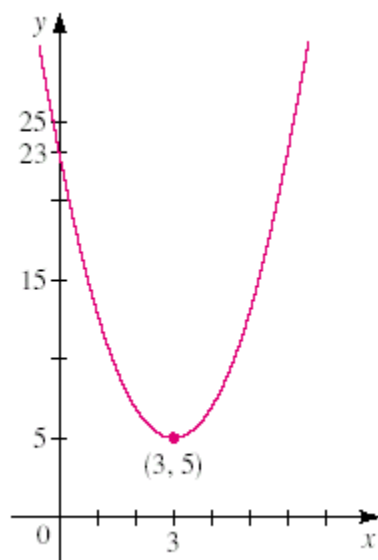
Realice un análisis completo de las siguientes relaciones y gráfíquelas:

- 1) $f_1 = \{ (x, y) / y = x^2 - 8x \}$
- 2) $f_2 = \{ (x, y) / y = 2x^2 - 6x \}$
- 3) $f_3 = \{ (x, y) / y = x^2 + 6x + 8 \}$
- 4) $R_3 = \{ (x, y) / x = y^2 - 7y + 10 \}$
- 5) $R_5 = \{ (x, y) / x = 2y^2 + 5y - 3 \}$

¿ Y qué pasa en los casos en que la Parábola no corta al eje x ?. Observe el siguiente ejemplo

$$R_6 = \{ (x, y) / x = 2x^2 - 12x + 23 \}$$

VIRGINIO GOMEZ



Observe que, la Parábola no corta el eje X . Esto ocurre siempre cuando la expresión $b^2 - 4ac < 0$.

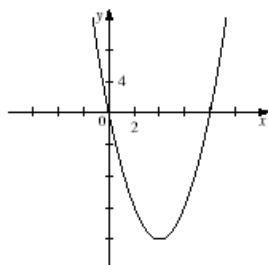
Respuesta

1)

Vértice $(4, -16)$

Intersección eje X $(0, 0), (8, 0)$

Intersección eje Y : $(0, 0)$

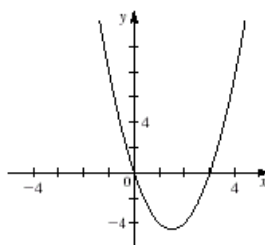


2)

Vértice $(3/2, -9/2)$

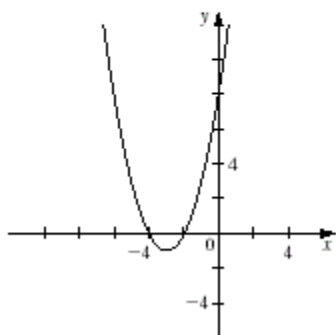
Intersección eje X $(0, 0), (3, 0)$

Intersección eje Y : $(0, 0)$

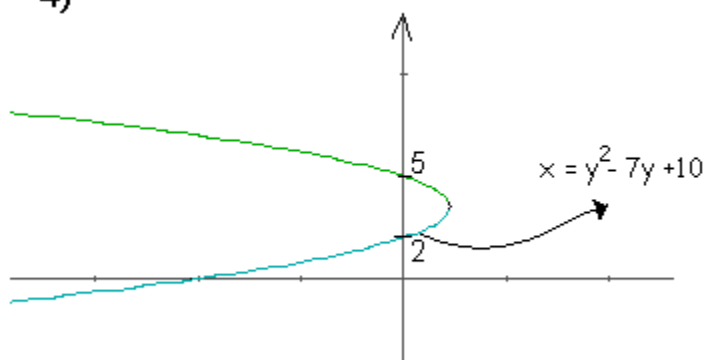


VIRGINIO GÓMEZ

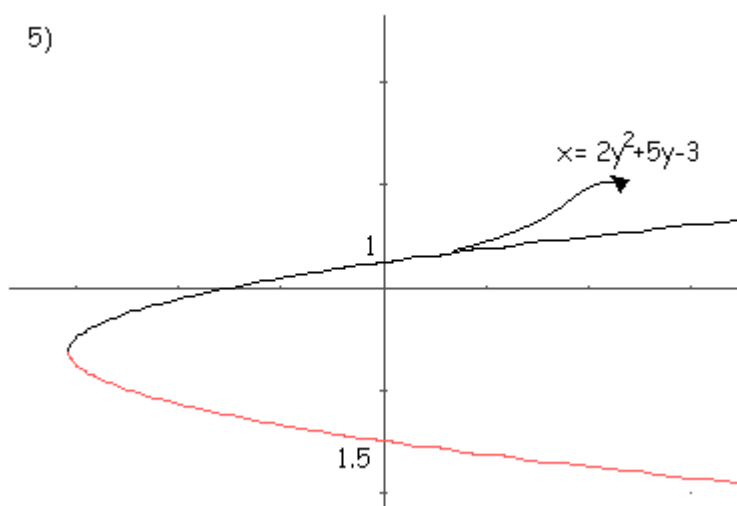
- 3) Vértice $(-2, 3)$
Intersección eje X $(-4, 0), (-2, 0)$
Intersección eje Y: $(0, 8)$



4)



5)

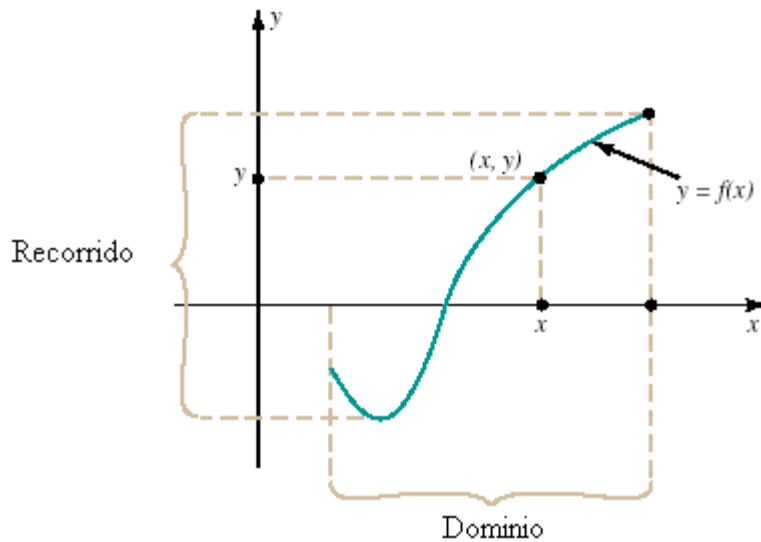


Volvamos nuevamente al concepto estudiado anteriormente: Dominio y Recorrido de una Relación.

VIRGINIO GOMEZ

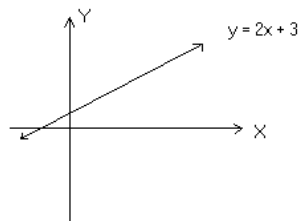
¿existe otra forma de determinar dominio y recorrido de una relación?

Sí, a través del **gráfico** de éstas.



Ejemplo

Dado el siguiente gráfico:



En esta relación $y = 2x + 3$, la gráfica representa una línea recta y como no hay restricciones en el dominio, ni en el recorrido se tiene que:

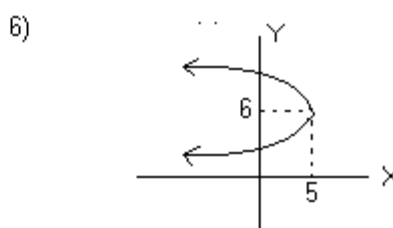
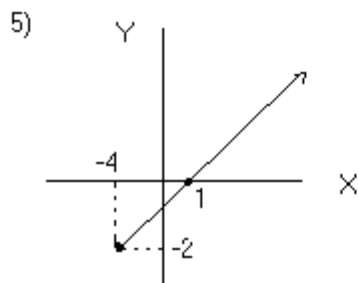
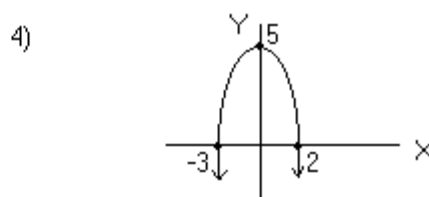
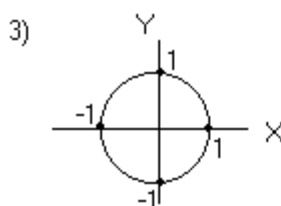
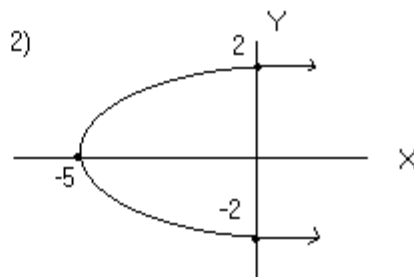
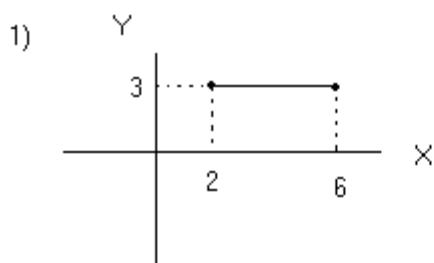
$$Dom R = \mathbb{R}$$

$$Rec R = \mathbb{R}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios

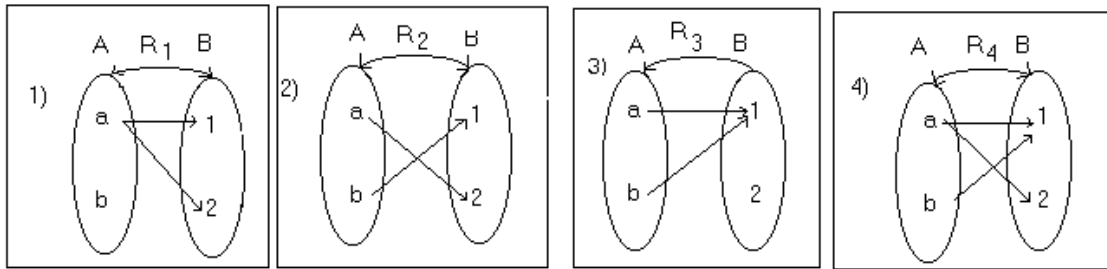
Determine en los siguientes gráficos, el dominio y recorrido de las siguientes relaciones:



Respuesta

1. — $Dom R = [2, 6]$ $Rec R = \{3\}$
2. — $Dom R = [-5, +\infty[$ $Rec R = \mathbb{R}$
3. — $Dom R = [-1, 1]$ $Rec R = [-1, 1]$
4. — $Dom R = \mathbb{R}$ $Rec R =]-\infty, 5]$
5. — $Dom R = [-4, +\infty[$ $Rec R = [-2, +\infty[$
6. — $Dom R =]-\infty, 5]$ $Rec R = \mathbb{R}$

observe que los siguientes diagramas representan relaciones:



En estas relaciones sólo algunas de las relaciones cumplen la siguiente condición:

**A CADA ELEMENTO DEL CONJUNTO A,
LE CORRESPONDE UNO Y SOLO
UN ELEMENTO DEL CONJUNTO B**

¿En qué ejemplos pasa esto?

En el caso 2 y 3

Estas relaciones que cumplen la condición mencionada reciben el nombre específico de:
FUNCION

Una definición alternativa es:

Una función es un conjunto de pares ordenados (x,y) tales que no hay dos pares ordenados diferentes del conjunto que tengan el mismo primer elemento

Del ejemplo anterior, observe que:

$$R_1 = \{ (a, 1), (a, 2) \}$$

$$R_2 = \{ (a, 2), (b, 1) \}$$

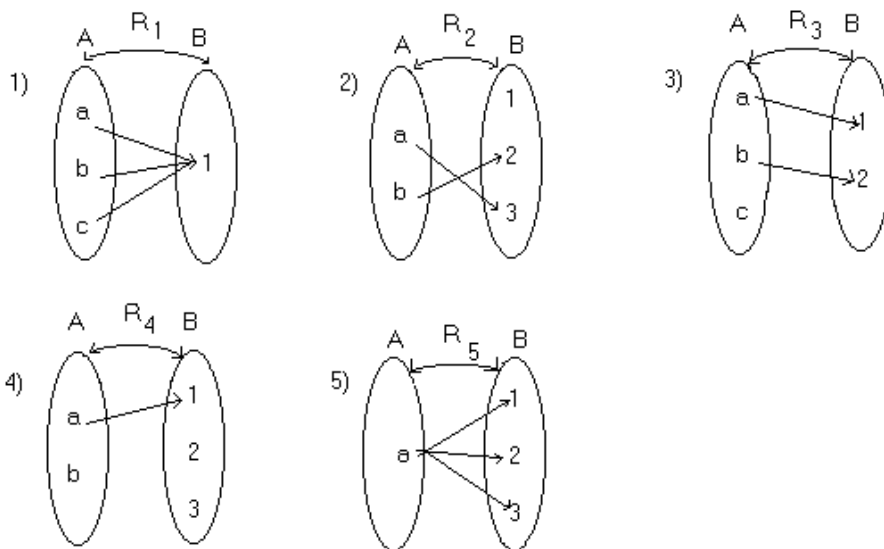
$$R_3 = \{ (a, 1), (b, 1) \}$$

$$R_4 = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1) \}$$

Lo cual reafirma que sólo son funciones R_2 y R_3

Ejercicios

I) Determine en los siguientes diagramas, cuáles de las relaciones dadas son funciones:

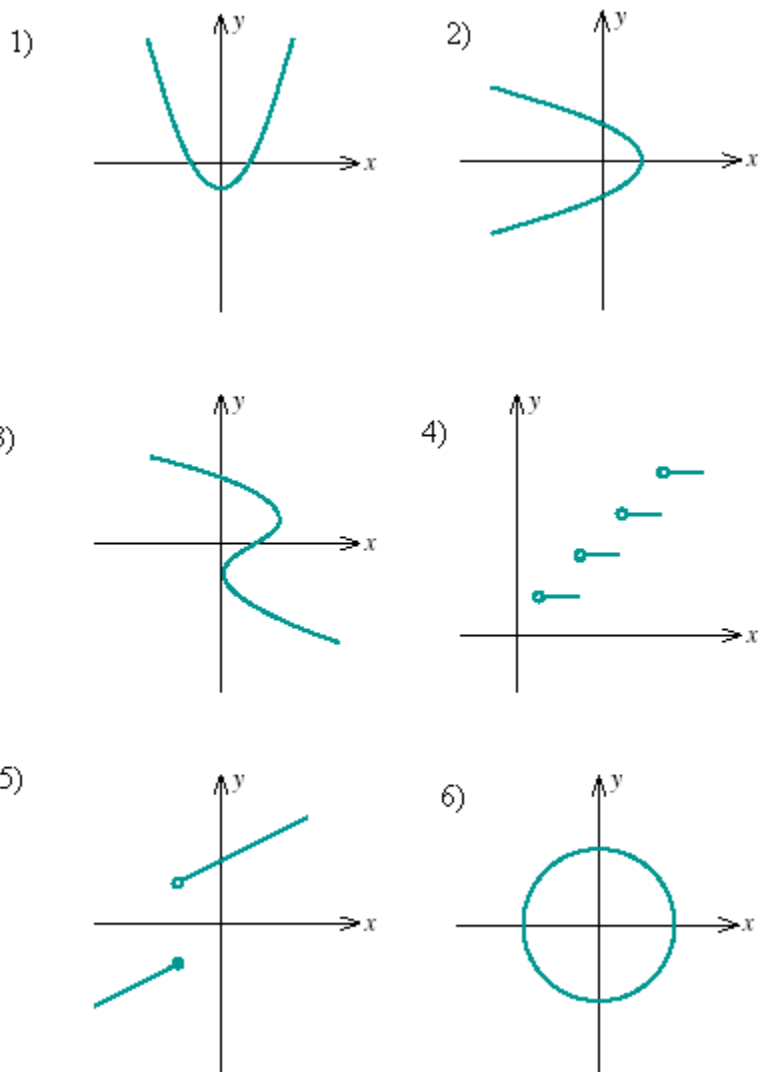


II) Determine en los siguientes conjuntos cuáles representan **funciones**:

- 1) $\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) \}$
- 2) $\{ (1, 2), (2, 2), (3, 2) \}$
- 3) $\{ (1, a), (2, a), (3, a) \}$
- 4) $\{ (1, 2), (2, 3), (4, 5) \}$

III) Determine en los siguientes gráficos, cuáles de las relaciones dadas son funciones:

VIRGINIO GOMEZ



Respuesta

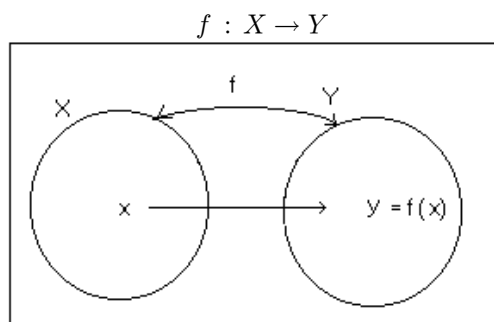
- I) Son funciones las relaciones R_1 y R_2 II) Son funciones los ejercicios 2), 3) y 4)
III) Son funciones 1), 4) y 5)

VIRGINIO GOMEZ

Notación:

Usualmente las funciones se denotan con las letras ***f, g, h, ...***, etc. y la función ***f*** de un conjunto ***X*** a uno ***Y*** se representa por medio de la notación:

$$y = f(x)$$



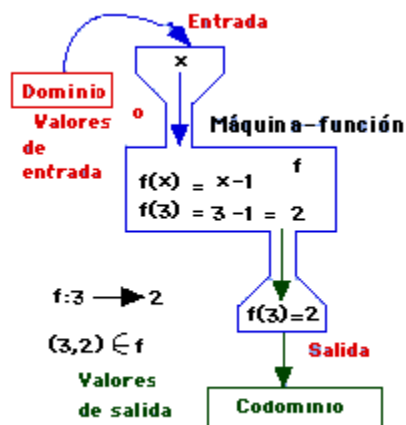
Los elementos de ***X*** se llaman **preimagen**. La variable ***x*** se llama **variable independiente**. Los elementos de ***Y*** que están relacionados con ***X*** se llaman **imagen**. La variable ***y*** se llama **variable dependiente**.

A menudo una función se define por medio de una fórmula explícita.

Se puede pensar en una *función f* como en una máquina. El dominio es el conjunto de entradas (la materia prima) para la máquina, la regla describe la forma de procesar la entrada y los valores de la función son las salidas de la máquina.

Ejemplo

Si $f(x) = x - 1$, evaluar con $x = 3$ en una máquina-función



Ejemplo 1:

Sea la función definida por la expresión: $f(x) = x^2$

La función está definida de \mathbb{R} en \mathbb{R}_0^+ , ya que el cuadrado de un número real es un número real positivo o cero. Para hallar los valores de y , le asignamos valores a x y los reemplazamos en la fórmula $f(x)$:

$$\text{Sea } x = 3 \quad \Rightarrow f(3) = (3)^2 = 9$$

$$\text{Sea } x = -4 \quad \Rightarrow f(-4) = (-4)^2 = 16$$

$$\text{Sea } x = 0 \quad \Rightarrow f(0) = (0)^2 = 0$$

Luego, se tiene que: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ $\text{Rec } f = \mathbb{R}_0^+$

La representación gráfica de $f(x) = x^2$ es una Parábola. **!!!Gráfiquela Ud. !!!**

Ejemplo 2:

Estudios empíricos indican que el período de vida de un mamífero en cautiverio está relacionado con el tamaño del cuerpo por medio de la función potencia:

$$L(M) = (11,8) M^{0,2}$$

¿Qué predice esta función para el período de vida de un elefante de 4.000 kg en un zoológico?

Respuesta

Se tiene que $M = 4.000$

$$L(4.000) = (11,8) 4.000^{0,2}$$

$$L(4.000) = 61,986$$

Por lo tanto, un animal en cautiverio vive aproximadamente 62 años.

Ejercicios

- 1) De la misma pregunta ¿Qué predice esta función para el período de vida en un hombre de 80 kg recluido en una prisión?
- 2) La distancia en pies que un objeto recorre el vacío está dada por $s(t) = 16t^2$ donde t es tiempo en s . Encuentre
 - a) $s(0)$
 - b) $s(1)$
 - c) $s(2)$
 - d) $s(3)$
- 3) La velocidad del sonido en el aire varía con la Temperatura según el modelo:

$$v(T) = 33,145 \sqrt{T/273}$$

donde v es la velocidad del sonido en centímetros por segundo y T es la temperatura del aire en grados Kelvin. ¿En qué día viaja más rápidamente el sonido de fuegos artificiales detonadores: 18 de septiembre ($T = 310^\circ K$) o 1° de enero ($T = 270^\circ K$)?

- 4) La función que transforma la temperatura de grados Fahrenheit a grados Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
- Determine cuantos grados Celsius son 80 grados Fahrenheit
 - Determine cuántos grados Fahrenheit son 30 grados Celsius

Respuesta

- 28, 3 años
- a) 0 b) 16 c) 64 d) 144
- 18 de septiembre
- a) $27^{\circ} C$ b) $86^{\circ} F$

TIPOS DE FUNCIONES

Función Par

f es par $\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$

Función Impar

f es impar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$

Nota: Las funciones **pares** son *simétricas respecto del eje y*. Las funciones **impares** son *simétricas respecto del origen de coordenadas*.

Ejercicios

Determine si las siguientes funciones son **Par** o **Impar**

- $y = |x|$
- $y = \frac{1}{x}$
- $f(x) = x^2 + 1$
- $g(x) = x^4$

Respuesta

Son Par (a), (c) y (d)
Es Impar (b)

Función por tramos

Una regla que defina una función puede incluir más de una fórmula. Una función definida de esta manera se llama Función definida por Tramos.

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplo:

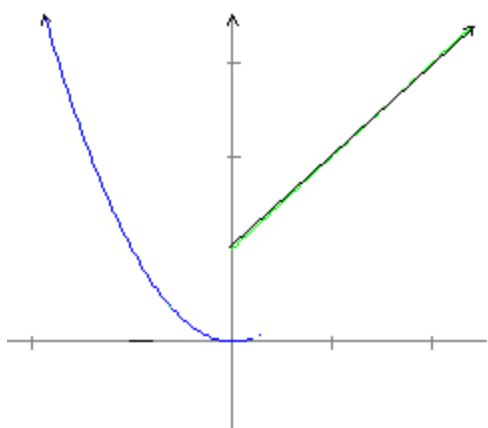
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Esta función es **una sola**, pero se da en dos partes o tramos.

Si queremos determinar $g(-2)$ reemplazamos $x = -2$ en el primer tramo, es decir, que $g(-2) = (-2)^2 = 4$

Para determinar $g(5)$, consideramos el segundo tramo, es decir, $g(5) = 5 + 1 = 6$

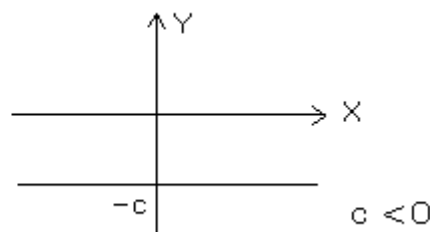
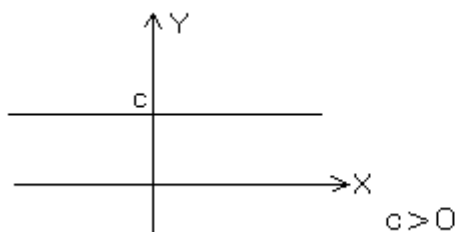
La gráfica de la función $g(x)$ es:



Función Constante

Si c representa un elemento de cualquier conjunto, entonces la función f definida por $f(x) = c$ para todos los x del dominio de f se llama función constante.

El gráfico de una función constante es:



Ejemplo:

Sea la función constante definida por: $f(x) = 5$

Suponga que el dominio de f es el conjunto \mathbb{R} de números reales, entonces:

$$f(-3) = 5, \quad f(2) = 5, \quad f(\sqrt{3}) = 5, \quad \text{etc.} \quad \text{¡¡Grafíquela Ud.!!}$$

Ejercicios

Determina el valor de la función para el punto señalado:

Función	$f(-5)$	$f(-2/3)$	$f(a+1)$	$f(0,4)$	$f(a-b)$	$f(\sqrt{2})$
$f(x) = -2x + 1$						
$f(x) = \frac{2x-3}{1+4x}$						
$f(x) = x^2$						
$f(x) = 4$						

2) Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^4 - x^2 & x \leq 1 \\ x + 5 & x > 1 \end{cases}$

Hallar:

a) $f(0) =$

b) $f(-3) =$

c) $f(5) =$

3) Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} & x \neq \pm 1 \\ x + 2 & x = 1 \\ x - 3 & x = -1 \end{cases}$

Hallar:

a) $f(-3) =$

b) $f(6) =$

c) $f(1) =$

d) $f(-1) =$

4) El precio del metro cuadrado de un material plástico para suelos depende de la cantidad que compremos, x , y es el precio en \$ y viene dado por la función $f(x)$ definida

$$f(x) = \begin{cases} 10 - 0,05x & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 7,5 - 0,02(x - 50) & \text{si } 50 \leq x \leq 100 \\ 6,5 - 0,002(x - 100) & \text{si } 100 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

¿Cuál será el precio si compro $300 m^2$?

Respuesta

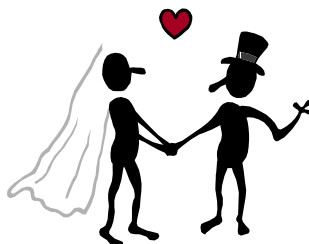
1)

Función	$f(-5)$	$f(-2/3)$	$f(a+1)$	$f(0,4)$	$f(a-b)$	$f(\sqrt{2})$
$f(x) = -2x + 1$	11	$7/3$	$-2a - 1$	0,2	$-2a + 2b + 1$	$-2\sqrt{2} + 1$
$f(x) = \frac{2x-3}{1+4x}$	$13/19$	$13/5$	$2a - 1 / 4a + 5$	-0,85	$\frac{2a-2b-3}{1+4a-4b}$	$\frac{2\sqrt{2}-3}{1+4\sqrt{2}}$
$f(x) = x^2$	25	$4/9$	$(a+1)^2$	0,16	$(a-b)^2$	2
$f(x) = 4$	4	4	4	4	4	4

- 2) a) 0 b) 153 c) 10
3) a) 10 b) 37 c) 3 d) -4
4) \$ 6,1

FUNCION INYECTIVA

Una función es inyectiva si a cada elemento del dominio le corresponde un sólo elemento del recorrido



En otras palabras,

**no se repite el segundo
elemento en ningún
par ordenado**

Ejemplos

Los siguientes conjuntos son funciones que van de los conjuntos M a N , con $M = \{2, 3, 4\}$ y $N = \{1, 2, 3, 4\}$, pero sólo algunos cumplen la condición descrita anteriormente.

Determine cuál (es) es (son) **inyectiva(s)**:

- 1) $A = \{(2, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ 2) $B = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
3) $C = \{(2, 2), (3, 3)\}$

Respuesta

Son inyectivas B y C .

FUNCION SOBREYECTIVA

Una función es sobreyectiva si **todas las imágenes tienen preimagen**.

Todos los elementos del Conjunto de Llegada están relacionados con un elemento del Dominio, NO SOBRA NINGUN ELEMENTO

Es decir, todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con un elemento del dominio, no sobra ningún elemento.

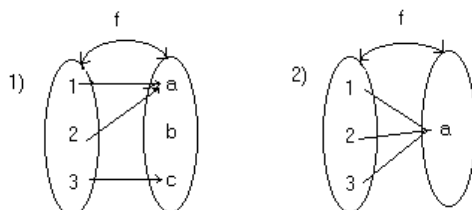
El conjunto de llegada se denomina también **CODOMINIO** de la función.

Luego, se puede escribir que una función f es sobreyectiva si:

$$\mathbf{Cod\ f = Rec\ f}$$

Ejemplo

Determine cuál(es) de la(s) siguiente(s) funciones son sobreyectiva(s):



Respuesta:

Sólo el ejemplo 2) es una función sobreyectiva.

Ejercicios

I) Determine cuáles de las siguientes funciones son **inyectivas y/o sobreyectivas** si:

$$f : M \rightarrow N$$

$$M = \{ 2, 3, 4 \} \quad N = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

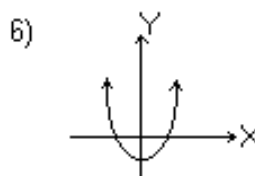
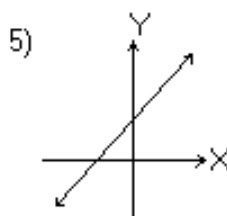
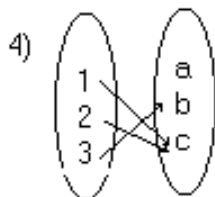
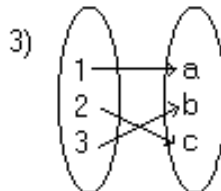
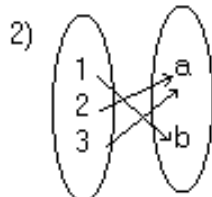
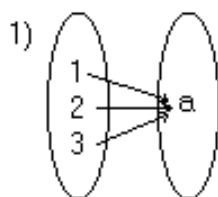
$$A = \{ (2, 1), (3, 2), (4, 2) \}$$

$$B = \{ (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$$

$$C = \{ (2, 1), (3, 1), (4, 1) \}$$

$$D = \{(2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$$

II) Determine en cuál de los siguientes diagramas se presenta una función **sobreyectiva**:



Respuesta

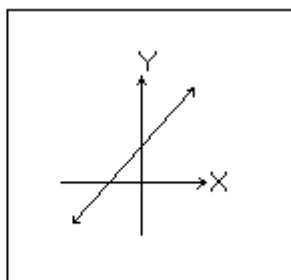
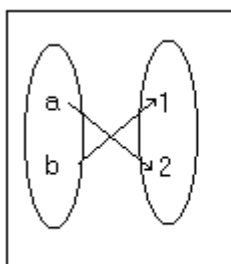
I) Es inyectiva B y D

II) Son sobreyectivas 1), 2), 3) y 5)

FUNCION BIYECTIVA

Una función es biyectiva si es **inyectiva y sobreyectiva a la vez**.

Por ejemplo, en el diagrama y en el sistema cartesiano se muestran funciones biyectivas:

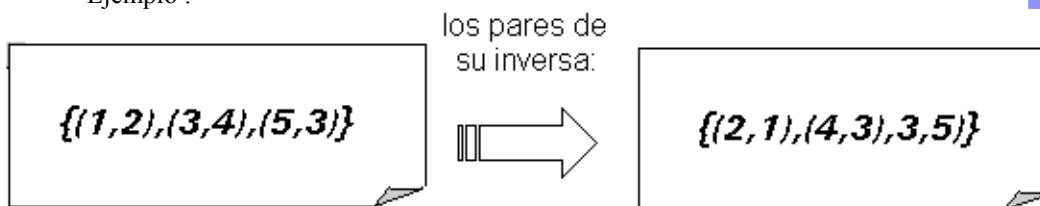


VIRGINIO GOMEZ

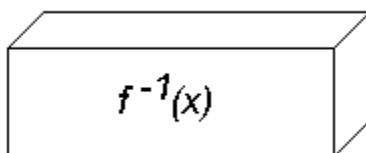
FUNCION INVERSA

Una función **tiene inversa**, sí y sólo si, es biyectiva.

Ejemplo :



Si una función es $f(x)$ su inversa:



Para obtener la inversa de una función, primero se debe determinar si esta es biyectiva y luego la forma de la inversa, para ésto se despeja la variable " x "

Ejemplo:

Sea $f(x) = \{ (x, y) / y = 2x + 5 \}$. Determine la **Forma de la función Inversa**

Respuesta

Como la ecuación de esta función es una línea recta, la función es **biyectiva**. Su inversa se obtiene despejando x de la ecuación $y = 2x + 5$

$$y - 2x = 5$$

$$-2x = 5 - y \quad / \cdot -1$$

$$2x = y - 5$$

$$x = \frac{y - 5}{2}$$

Luego, se intercambian las variables y por x :

$$y = \frac{x - 5}{2}$$

Por lo tanto: $f^{-1}(x) = \{ (x, y) / y = \frac{x - 5}{2} \}$

Ejercicios

Dadas las siguientes funciones, determine **sólo** la forma que tiene su **función inversa**:

1. – $F = \{ (x, y) / x + 2y = 10 \}$

2. – $G = \{ (x, y) / y = \frac{2x - 3}{5} \}$

3. – $H = \{ (x, y) / 3x - 5y = 1 \}$

4. – $I = \{ (x, y) / \frac{x - 2y}{5} = 10 \}$

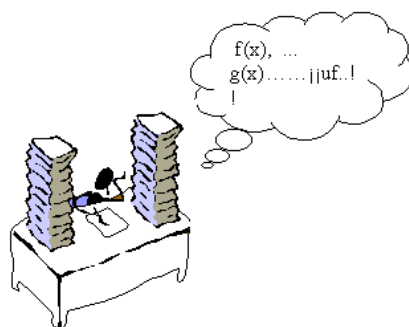
Respuesta

1. – $F^{-1} = \{ (x, y) / y = -2x + 10 \}$

2. – $G^{-1} = \{ (x, y) / y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \}$

3. – $H^{-1} = \{ (x, y) / y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \}$

4. – $I^{-1} = \{ (x, y) / y = 2x + 50 \}$



Sea $f : A \rightarrow B$ una función, entonces:

Resumiendo

1) **f se dirá inyectiva si:**

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

Es decir, a imágenes iguales, preimágenes iguales.

VIRGINIO GOMEZ

- 2) **f se dirá sobreyectiva o epiyectiva si:** $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$

En forma equivalente $Rec f = B$

$$Cod f = Rec f$$

- iii) **f se dirá biyectiva, si y sólo si, es inyectiva y epiyectiva a la vez.**

Observación: Si $f : A \rightarrow B$ no es Inyectiva, ni Sobreyectiva se puede encontrar una restricción sobre A y B de modo que $f : A' \rightarrow B'$ sea Inyectiva y Sobreyectiva, es decir, redefinir la función f .

;; Ahora, hagamos un análisis algebraico completo para un ejercicio en particular !!

Ejemplo 1:

Determine si la función es **biyectiva** (de no serlo redefínala):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = x^2$$

Respuesta

Dominio de la función: $Dom f = \mathbb{R}$

Codominio de la función: $Cod f = \mathbb{R}$

Recorrido de la función: $Rec f = \mathbb{R}_0^+$

$$Cod f \neq Rec f$$

Por lo tanto, **f no es sobreyectiva.**

Restricción: Se cambia el codominio \mathbb{R} por el recorrido \mathbb{R}_0^+

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Sólo resta analizar su inyectividad: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\text{Sea } f(x_1) = f(x_2) \\ (x_1)^2 = (x_2)^2 \\ |x_1| = |x_2|$$

Luego: $x_1 = x_2$ ó $x_1 = -x_2$

Por lo tanto, **f no es inyectiva.**

Restrinjamos el dominio de la función de \mathbb{R} a \mathbb{R}_0^+ para hacerla inyectiva.



Ahora, f es inyectiva y sobreyectiva:

Redefinida , se tiene:

$$\begin{array}{l} f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \rightarrow f(x) = x^2 \end{array}$$

Por lo tanto, f es biyectiva.

Ejemplo 2:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 2x - 1$ ¿Es f una función biyectiva?. Si lo es, determine su inversa f^{-1}

Respuesta:

1) Inyectividad:

$$\begin{array}{ll} f(x_1) = f(x_2) & \\ 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 & / +1 \\ 2x_1 = 2x_2 & / :2 \\ x_1 = x_2 & \therefore f \text{ es inyectiva.} \end{array}$$

2) Sobreyectividad:

Para determinar el recorrido de f , despejamos x en función de y . Luego, analizamos las posibles restricciones para la variable y :

$$\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y + 1 = 2x \end{array}$$

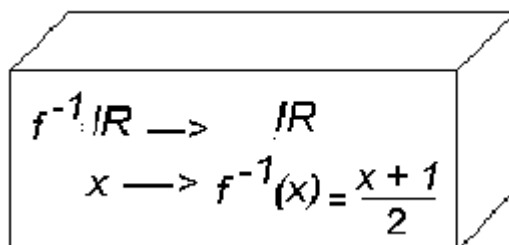
$$\frac{y+1}{2} = x \quad \text{No existen restricciones para } y.$$

Por lo tanto, $\text{Rec } f = \mathbb{R} = \text{Cod } f$ y se tiene que f es sobreyectiva.

VIRGINIO GOMEZ

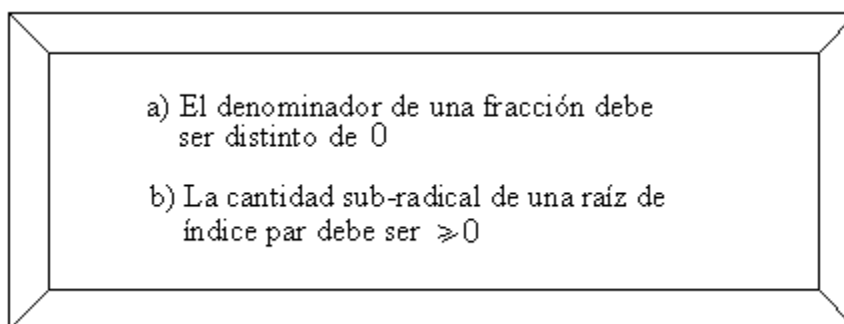
Como f es inyectiva y sobreyectiva, se tiene que f es Biyectiva.

Luego, existe la función inversa de f y se define de la siguiente forma:


$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \end{aligned}$$

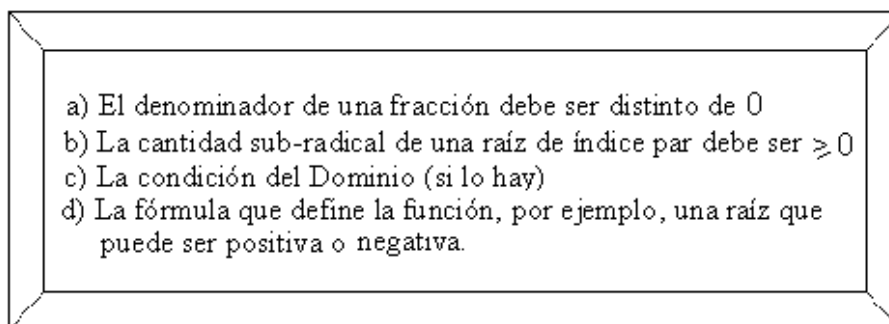
Observación: El estudio de una función debe considerar los siguientes pasos:

- 1) Para determinar el DOMINIO de una función se analizan las posibles indeterminaciones que puede tener la fórmula que define a dicha función:



- a) El denominador de una fracción debe ser distinto de 0
- b) La cantidad sub-radical de una raíz de índice par debe ser ≥ 0

- 2) Para determinar el RECORRIDO de una función, primero se debe despejar x en función de y en la fórmula que define la función.
Luego, se verifican para la expresión que resulta de lo anterior:



- a) El denominador de una fracción debe ser distinto de 0
- b) La cantidad sub-radical de una raíz de índice par debe ser ≥ 0
- c) La condición del Dominio (si lo hay)
- d) La fórmula que define la función, por ejemplo, una raíz que puede ser positiva o negativa.

- 3) Graficar la función para verificar el Dominio y Recorrido encontrados.
- 4) Para verificar la inyectividad, además, del método analítico (visto anteriormente) está el método gráfico que consiste en trazar una recta paralela al eje x .
 - Si la recta corta a la gráfica de la función en un solo punto a lo largo de toda su gráfica, entonces la función es inyectiva.

VIRGINIO GÓMEZ

- Si la recta corta a la gráfica de la función en dos o más puntos entonces la función no es inyectiva. Para redefinir la inyectividad se debe restringir el dominio de la función.

5) Para verificar la sobreyectividad basta comparar el Recorrido encontrado con el Codominio de la función. Esto es:

Si $Cod f = Rec f$ entonces f es sobreyectiva.

Si $Cod f \neq Rec f$ entonces f no es sobreyectiva.

Si el codominio no está dado en forma explícita se supone que $Cod f = \mathbb{R}$.

Para redefinir la sobreyectividad se cambia el codominio dado por el recorrido que se ha determinado.

6) Para determinar la función inversa se debe cumplir la condición de biyectividad de la función dada.

Luego de esto, se define la función inversa $f^{-1} : Rec f \rightarrow Dom f$

$$x \rightarrow y = f^{-1}(x)$$

La fórmula de la inversa se obtiene despejando x en función de y , luego se cambia x por y e y por x en la expresión que resulta del despeje anterior.

Ejemplos a desarrollar en clases:

Realice un análisis completo de la función definida por: $f(x) = \frac{x+3}{1+2x}$

Ejercicios

I) Indique si los valores dados para x : pertenecen al dominio de estas funciones:

$x = 0$; -2 ; $3, 5$; $\sqrt{2}$; $-0,25$

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = x - \sqrt{2}$

d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $y = \sqrt{x-3}$

f) $y = \sqrt{7-2x}$

II) Determine el Dominio de las siguientes funciones:

a) $y = 4x + 5$

b) $f(x) = x^3 + 7x + 2$

c) $g(a) = \frac{a-3}{a+1}$

d) $p(x) = \frac{7-x}{x^2+3}$

e) $r(t) = -\sqrt{4-2t}$

f) $s(t) = t^2 + 4t + 3$

g) $g(h) = \sqrt{5h+3}$

h) $p(b) = \sqrt{\frac{b-3}{b+2}}$

II) Determine el Recorrido de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 8x - 3$

b) $q(x) = 2x^2 - 4$

c) $r(x) = 3x^2 - 12x$

d) $s(t) = \frac{t-5}{2t-4}$

e) $s(h) = -\sqrt{h+3}$

f) $p(q) = \sqrt{q-5}$

g) $m(c) = \frac{5-3c}{2c+1}$

III) Analice Inyectividad, Sobreyectividad y Biyectividad para las siguientes funciones y luego determine la función inversa (restrinja si es necesario):

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; f(x) = 4 - 2x$

b) $g: \mathbb{R}_0^- \rightarrow \mathbb{R} ; g(x) = x^2 - 9$

c) $p: [-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^- ; p(x) = -\sqrt{5x+10}$

d) $s: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\} ; s(t) = \frac{3t+2}{t-1}$

e) $m: \mathbb{R} \rightarrow [-4, +\infty[; m(t) = t^2 - 4$

Respuesta

I)

a) 3,5; $\sqrt{2}$

b) Todos salvo -2

c) Todos

d) Todos

e) 3,5

f) Todos

II)

a) \mathbb{R} b) \mathbb{R} c) $\mathbb{R} - \{-1\}$ d) \mathbb{R}

e) $t \leq 2$ f) \mathbb{R} g) $h \geq -\frac{3}{5}$ h) $b < -2$ ó $b \geq 3$

II)

a) \mathbb{R} b) $y \geq -4$ c) $y \geq -12$ d) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

e) \mathbb{R}_0^- f) \mathbb{R}_0^+ g) $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$

III)

a) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \frac{4-x}{2}$

b) $g^{-1} : [-9, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^-$; $g^{-1}(x) = -\sqrt{x+9}$

c) $p^{-1} : \mathbb{R}_0^- \rightarrow [-2, +\infty[$; $p^{-1}(x) = \frac{x^2-10}{5}$

d) $s^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$; $s^{-1}(t) = \frac{t+2}{t-3}$

e) $m^{-1} : [-4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_0^+$; $r^{-1}(t) = \sqrt{t+4}$

Un poco de historia.....

El término Función fue usado por primera vez en **1637** por el matemático francés **René Descartes** para designar una potencia x^n de la variable x .

En **1694** el matemático alemán **Gottfried Wilhelm Leibniz** utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. Hasta recientemente, su uso más generalizado ha sido el definido en **1829** por el matemático alemán, **J.P.G. Lejeune-Dirichlet** (1805-1859), quien escribió: "Una variable es un símbolo que representa un número dentro de un conjunto de ello. Dos variables x e y están asociadas de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y , se dice que y es una función (unívoca) de x . La variable x , a la que se asignan libremente valores, se llama variable independiente, mientras que la variable y , cuyos valores dependen de la x , se llama variables dependientes. Los valores permitidos de x constituyen el dominio de definición de la función y los valores que toma y constituye su recorrido".

AUTOEVALUACION

1) Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \end{cases}$

determine a) $f(-2)$, b) $f(2)$, c) $f(4)$

- 2) Grafique la siguiente relación, analizando concavidad, Eje de Simetría, Intersección con ejes X e Y y vértice

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y^2 + 4y + 5 \}$$

- 3) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{3-x}$$

Determine:

a) Dominio de $f(x)$

b) Recorrido de $f(x)$

c) Inyectividad

d) Sobreyectividad

e) Función Inversa (restrinja si es necesario)

f) $f(-5)$

g) $f(3)$

h) $f^{-1}(-3)$

i) $f^{-1}(4)$

- 4) En 1897 un profesor de Física propuso que la temperatura T en grados Fahrenheit, en un termómetro "criquet" está dada por

$$T(x) = \frac{x}{4} + 40$$

donde x es el número de chillidos del grillo por minuto. Si el número de chillidos se aumenta en 10, determine en cuánto aumentó la temperatura

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta

1) a) $f(-2) = 0$ b) $f(2) = 1$ $f(4) =$ no está definido en la función

2) Concavidad

$a = -1 < 0 \Rightarrow$ Concavidad hacia la izquierda

Eje de Simetría

$$y = -\frac{b}{2a}, \quad y = 2$$

Intersección eje X

$x = 5 \Rightarrow (5, 0)$

Intersección eje Y

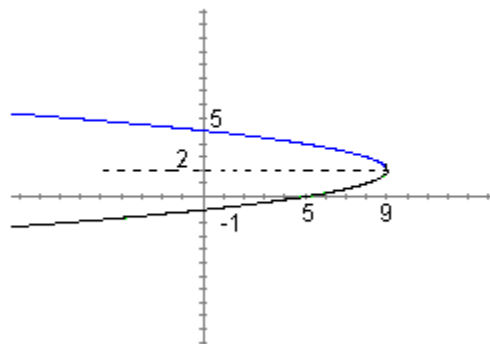
$-y^2 + 4y + 5 = 0$

$y_1 = -1, \quad y_2 = 5$ Los puntos son: $P_1(0, -1), P_2(0, 5)$

Vértice

$V(x, -\frac{b}{2a}), \quad V(9, 2)$

Gráfico



3) a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $\text{Rec } f = \mathbb{R} - \{1\}$

c) $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{x_1 + 2}{3 - x_1} = \frac{x_2 + 2}{3 - x_2}$$

$$(x_1 + 2)(3 - x_2) = (x_2 + 2)(3 - x_1)$$

$$5x_1 = 5x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Por lo tanto f es Inyectiva

d) $\text{Cod } f = \mathbb{R}, \quad \text{Rec } f = \mathbb{R} - \{1\}$

VIRGINIO GOMEZ

f No es Sobreyectiva, luego restringimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x &\rightarrow f(x) = \frac{x+2}{3-x} \end{aligned}$$

función Inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \end{aligned}$$

$$f) f(-5) = -3/8$$

$$h) f^{-1}(-3) = 11/2$$

$$\begin{aligned} g) f(3) &= \text{indeterminación} \\ i) f^{-1}(4) &= 2 \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{si } T = 0, \quad T(0) = \frac{0}{4} + 40 = 40$$

$$T = 10, \quad T(0) = \frac{10}{4} + 40 = 40 = 42,5$$

$$42,5 - 40 = 2,5. \quad \text{Por lo tanto aumentó } 2,5^{\circ} \text{ F}$$

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO IV

FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

VIRGINIO GOMEZ

FUNCION EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

Este tipo de funciones nos permiten representar situaciones de la vida real.

UN EJEMPLO REAL

Algunos tipos de bacterias se reproducen por "**mitosis**", dividiéndose la célula en dos, en espacios de tiempo muy pequeño, en algunos casos cada 15 minutos. *¿Cuántas bacterias se producen en estos casos, a partir de una célula, en un día?*

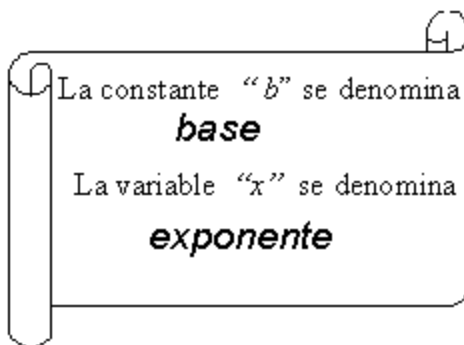
<i>tiempo (min)</i>	<i>bacterias</i>
<i>15 min, $x = 1$</i>	<i>2</i>
<i>30 min, $x = 2$</i>	<i>4</i>
<i>45 min, $x = 3$</i>	<i>8</i>
<i>60 min, $x = 4$</i>	<i>16</i>

Es decir, las bacterias crecen a razón de 2^x .
si x son los intervalos de 15 minutos: en una hora hay $2^4 = 16$ bacterias, en dos horas $2^8 = 256$, es decir, en un día, $2^{24 \cdot 4} = 2^{96} = 7,9 \cdot 10^{28}$. ¡bacterias!

Esto nos da idea del llamado ¡crecimiento exponencial!, expresión que se utiliza cuando algo crece muy deprisa

Una **función exponencial** es una función definida por una ecuación de la forma:

$$f(x) = b^x, \text{ en la cual } b > 0 \text{ y } b \neq 1$$



- Para que la función tenga sentido y se pueda dibujar, la base b debe ser $b > 0$, ¿por qué?
Por ejemplo si $b = -2$, ¿cómo se definiría $(-2)^{\frac{1}{2}}$? Seguro que sabrás que $\frac{1}{2}$ es la raíz cuadrada de -2 , la cuál no existe. Lo mismo pasaría con otros valores de x , por lo que la función no tendría sentido.
- Es claro que si $b = 0$, se trata de la función 0, sin interés.
- Habrás observado también que la función cuando $b > 1$ es muy distinta que cuando $b < 1$, y además que cuando $b = 1$ se trata de una **recta**, es decir, de la función $y = 1$, que es una recta horizontal.

Gráfica de funciones exponenciales

Para graficar estas funciones se construye una tabla de valores conveniente para x y se determinan los valores de y al haber reemplazado x en la ecuación.

La función es siempre creciente o siempre decreciente (para cualquier valor de x), dependiendo de los valores de la base " b ".

La función **es creciente** si $b > 1$ y **es decreciente** si $0 < b < 1$

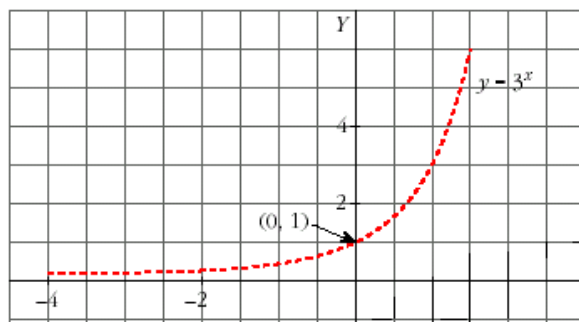
Ejemplo : Grafique $y = 3^x$

Respuesta

Haga una tabla de valores de la función $y = 3^x$ y a partir de ella, grafíquela

En este ejemplo $b = 3$, es decir, la función es **creciente**.

x	-2	-1	0	1	2
3^x	1/9	1/3	1	3	9



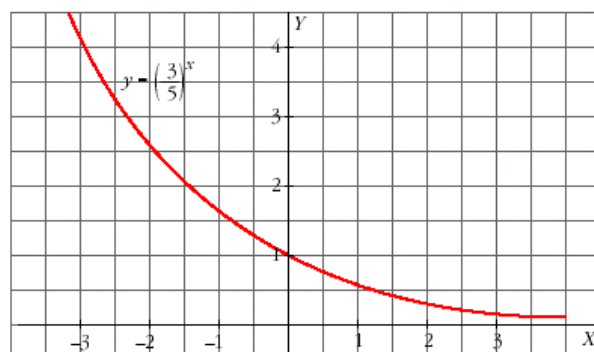
Ejemplo

Grafique $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

Respuesta

En este ejemplo $b = \frac{3}{5}$, por lo tanto la función es **decreciente**.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	4,63	2,78	1,67	1	0,6	0,36	0,22



Si observa las gráfica vistas en los ejemplos dados notará que se mantienen características comunes, de aquí obtenemos las propiedades siguientes:

Propiedades de la función Exponencial

- * La función existe para cualquier valor de x . El dominio de la función exponencial es el conjunto de los números reales.
- * Los valores de y son siempre positivos (prueba cuantos valores desees para x). Por tanto: LA FUNCIÓN SIEMPRE TOMA VALORES POSITIVOS para cualquier valor de x . El recorrido de f es el conjunto de los números reales positivos.
- * En todos los casos la función pasa por un punto fijo, la gráfica de la función interseca al eje Y cuando $x = 0$. Generalmente, el punto $(0, 1)$
- * El eje X es una asíntota horizontal para la gráfica de la función exponencial, es decir, se acerca al eje X tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia la derecha en el caso en que $0 < b < 1$ y hacia la izquierda en caso de $b > 1$.
- * La función f es inyectiva.

Ejercicios

I) Grafique las siguientes funciones, determine, además cuáles son crecientes y cuáles decrecientes:

1. — $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. — $f(x) = 3^x$

3. — $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}$

4. — $f(x) = 4^{-x}$

II) Las amebas, son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos (bipartición). Esto se realiza más o menos rápidamente según las condiciones del medio en que se encuentren (cultivo). Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, inicialmente, hay una ameba.

a) Calcule el número aproximado de amebas que habrá según pasan las horas y complete la tabla .

TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE AMEBAS	1	2	4				

b) Represente gráficamente estos datos

c) Cambie los ejes y represente la función cuyas variables sean, ahora:

x : número de amebas

y : tiempo (en horas)

III) Las sustancias radiactivas se desintegran transformándose en otras sustancias y lo hacen con mayor o menor rapidez, según de cuál se trate.

Supongamos que tenemos 1 kg de una sustancia radiactiva que se desintegra reduciéndose a la mitad cada año. El resto de la masa no desaparece, sino que se transforma en otro componente químico distinto.

a) Complete la tabla siguiente (utilize la calculadora para obtener los valores con tres cifras decimales):

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUST. RADIACT. (en kg)	1	0,5	0,250	0,125			

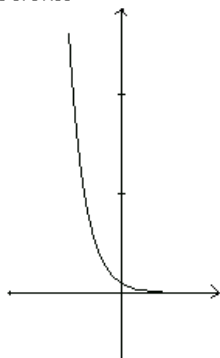
b) Represente gráficamente los datos

c) Cambie los ejes y represente la función cuyas variables son, ahora, x : peso de la sustancia radiactiva (en kg), y : tiempo transcurrido (en años)

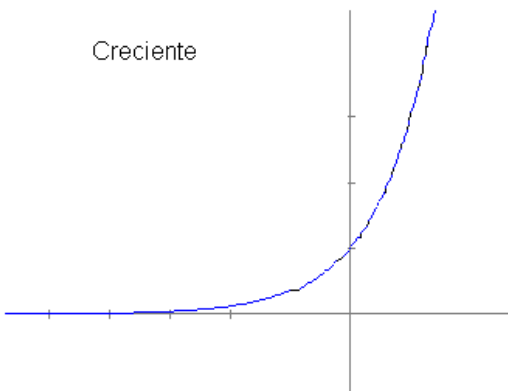
Respuesta

I)

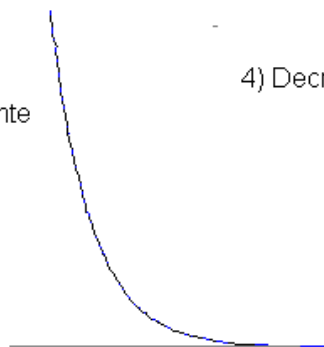
Decreciente



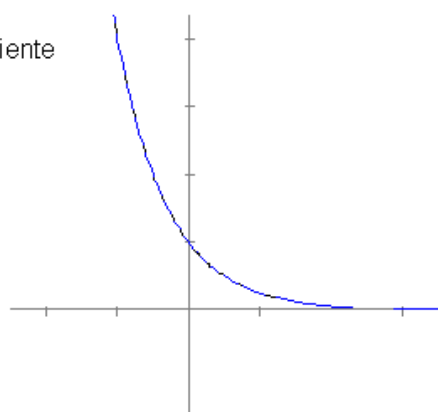
Creciente



3) Decreciente

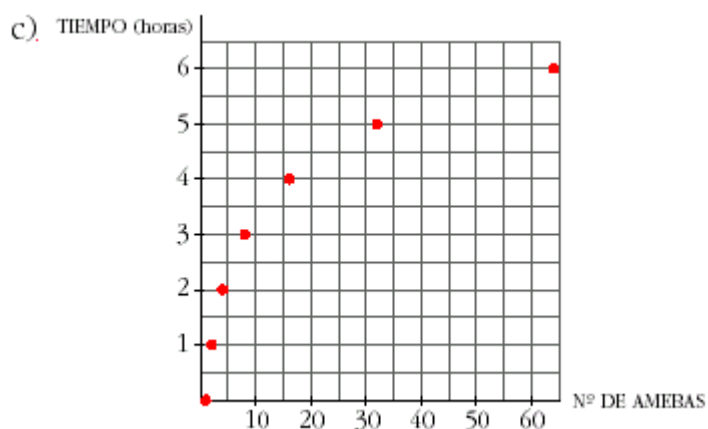
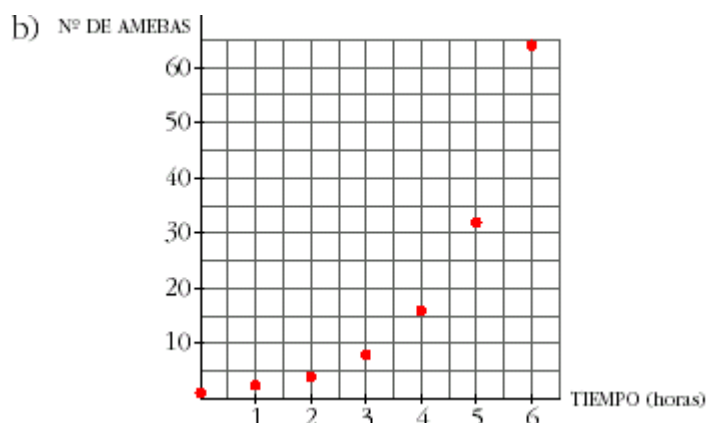


4) Decreciente



II) a)

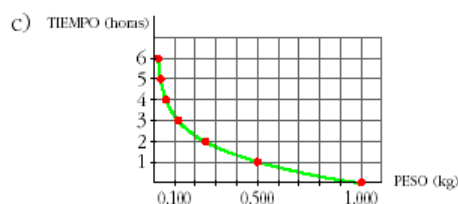
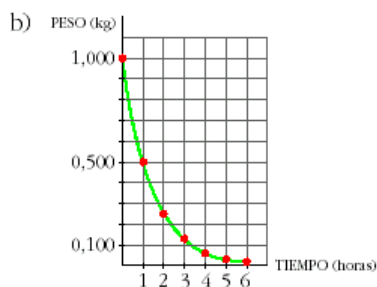
TIEMPO (horas)	0	1	2	3	4	5	6
Nº DE AMEBAS	1	2	4	8	16	32	64



III)

a)

TIEMPO (años)	0	1	2	3	4	5	6
SUST. RADIACT. (en kg)	1	0,5	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016



APLICACIONES DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Muchos Modelos matemáticos que se presentan en ciencias y matemática se pueden representar por funciones exponenciales.

Por ejemplo: La función exponencial se aplica a la química y física. En algunos elementos radioactivos son de tal naturaleza que su cantidad disminuye con respecto al tiempo, se cumple la ley exponencial y se dice que el elemento decrece o decae.

El Polonio (elemento radioactivo) descubierto por Marie Curie en 1898 decae exponencialmente de acuerdo a la función: $m = m_0 e^{-0,005 t}$, donde m_0 es la masa inicial del Polonio, m es la masa al cabo de un tiempo y t es el tiempo en días.

El crecimiento poblacional (Demografía) de una región o población en años, parece estar sobre una curva de característica exponencial que sugiere el modelo matemático dado por: $N = N_0 e^{kt}$, donde N_0 es la población inicial, t es el tiempo transcurrido en años y k es una constante. (En 1798, el economista inglés Thomas Malthus observó que la relación $N = N_0 e^{kt}$ era válida para determinar el crecimiento de la población mundial y estableció, además, que como la cantidad de alimentos crecía de manera lineal, el mundo no podía resolver el problema del hambre. Esta lúgubre predicción ha tenido un impacto tan importante en el pensamiento económico, que el modelo exponencial de crecimiento poblacional se conoce con el nombre de modelo Malthusiano).

En la medicina, muchos medicamentos son utilizados para el cuerpo humano, de manera que la cantidad presente sigue una ley exponencial de disminución.

Observación:

La función exponencial obedece a todas las leyes de los exponentes.

EL NUMERO e

Quizás ya conozcas un número muy especial llamado número " e ". Si no lo conocías, se trata de un número irracional, por tanto con infinitas cifras decimales y no periódico, cuyo valor es $e = 2,7182818.....$ en sus seis primeras cifras decimales.

Evidentemente $e > 1$, luego la función ya es conocida, siempre creciente.

Además de escribirse como $y = e^x$, también se escribe como $y = \exp(x)$, por tratarse de la función exponencial más utilizada

Debido a su importancia muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla e^x que nos permite calcular los valores de e^x directamente.

La función exponencial que tiene por base el número e tiene un especial interés que conocerás mejor cuando se estudien los límites y los logaritmos. Por ejemplo, en Cálculo el número e surge del estudio de la función f definida por:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ en donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

Puede probarse que los valores de la función $f(n)$ se acercan al número e , a medida que n aumenta de valor, es decir:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \text{ cuando } n \rightarrow +\infty$$



Ejercicios

1) Usando su calculadora (tres decimales aproximado) determine:

a) $e^3 =$

b) $e^5 =$

c) $e^{-4} =$

d) $e^{-2} + e^6 =$

2) La curva adoptada por un cable o una cuerda larga que cuelga sobre su propio peso entre dos soportes fijos se llama **catenaria**. Puede probarse que bajo ciertas condiciones un cable colgante asume la forma de la gráfica de la función:

$$f(x) = c \frac{e^{x/c} + e^{-x/c}}{2}$$

Determine, si $c = 2$

a) $f(2)$ b) $f(5)$ c) $f(-3)$

(tres decimales aproximado):

Respuesta

1) a) 20,086..

b) 148,413...

c) 0,018...

d) 403,564...

- 2) a) Para $c = 2$ y $x = 2$ se tiene:

$$f(2) = -2 \frac{e^{2/2} + e^{-2/2}}{2} = 3,086..$$

b) $f(5) = 12,265$

c) $f(-3) = 4,705$

Ejemplos de aplicación

El estroncio 90 se usa en reactores nucleares y se desintegra de acuerdo a la ecuación $A = P e^{-0,0248t}$ donde P es la cantidad presente en $t = 0$ y A la cantidad que queda después de t años. Si se colocan 500 miligramos de estroncio 90 en un reactor nuclear. ¿Cuánto quedará después de 10 años? (Expresar la solución con dos decimales)

Respuesta:

El modelo es $A = P e^{-0,0248t}$, se reemplazan los datos dados: $P = 500$ y $t = 10$

Luego: $A = 500 e^{-0,0248(10)}$
 $A \approx 390,18$

Después de 10 años quedan aproximadamente 390,18 miligramos de estroncio 90

Ejercicios: (dos decimales aproximado)

- 1) Para el mismo ejercicio dado anteriormente, considere
 - a) $P = 1500$ y $t = 8$, determine A
 - b) $A = 15000$, $t = 18$ meses, determine P
- 2) Si el monto generado por un capital C colocado a una tasa de interés compuesto i al cabo de n periodos de capitalización es:

$$M = C (1 + i)^n$$

- a) Determine el Monto que se obtendrá al cabo de 5 años al depositarse \$15.000 a una tasa de interés de 5% anual.
- b) Si el Monto obtenido es de \$ 200.000, la tasa de interés de 3% anual y el tiempo transcurrido 15 años. ¿Cuál fue el capital?
- 3) La población mundial P en 1974 era aproximadamente de 3,9 miles de millones y la tasa de crecimiento anual del 2%. Si se supone un crecimiento continuo entonces $P = 3,9 e^{0,02t}$, donde t es el tiempo en años después de 1974.
Suponga que no ocurren cambios en la tasa de crecimiento.
 - a) Calcule la población para 2003.
 - b) En cuánto tiempo la población aumenta al doble
- 4) En condiciones ideales el número de bacterias presentes en un cultivo en t horas está dada por el modelo $N(t) = 1.000 e^{kt}$, k es la tasa de crecimiento y 1.000 es el número de bacterias en el tiempo $t = 0$.
 - a) ¿ Cuántas bacterias habrá a las 3 horas si $k = 0,001$?

b) ¿ Cuántas bacterias habrá a las 3 horas si $k = -0,02$?

5) Se sabe que la concentración de un fármaco en sangre viene dado por $y = 100(0,94)^t$, y en miligramos, t en horas).

a) ¿Cuál es la dosis inicial?

b) ¿Qué cantidad de ese fármaco tiene el paciente al cabo de 1 hora? ¿Y de tres horas?

c) Represente la función.

Respuesta

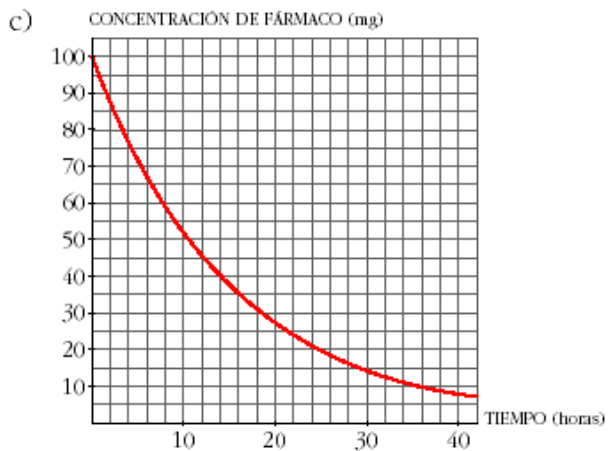
1) a) 1.230 b) 1556,85

2) a) \$ 19.144
b) \$ 128.372

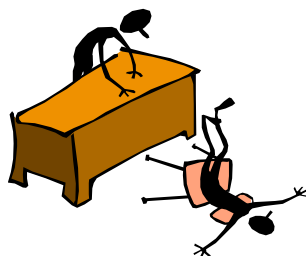
3) a) 6,97 miles de millones
b) 34,66 años

4) a) 1.003
b) 941,76

5) a) $t=0 \rightarrow y = 100 \text{ mg}$
b) $t = 1 \rightarrow y = 94 \text{ mg en 1 hora}$
 $t = 3 \rightarrow y = 83 \text{ mg en 3 horas}$



Otra función muy importante que tiene relación con la función exponencial es la función logarítmica, la cual vamos a estudiar a continuación



FUNCION LOGARITMICA

Ya que la función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $y = b^x$ es biyectiva, tiene en consecuencia una función inversa. Para encontrarla, haremos lo siguiente: Intercambiamos las variables x e y para obtener $x = b^y$. Esta fórmula define a x como una función de y :

y es el exponente al que se eleva la base b para obtener x

Reemplazando la palabra exponente por la palabra logaritmo podemos reformular la definición así:

" y es el logaritmo en la base b de x " y abreviarla utilizando la fórmula:

$$y = \log_b x \iff x = b^y$$

Esto nos relaciona la función logarítmica con la exponencial.

Por lo tanto, la función logarítmica con base b se escribe:

$$f(x) = \log_b x$$

Es la función inversa de la función exponencial con base b .

VIRGINIO GÓMEZ

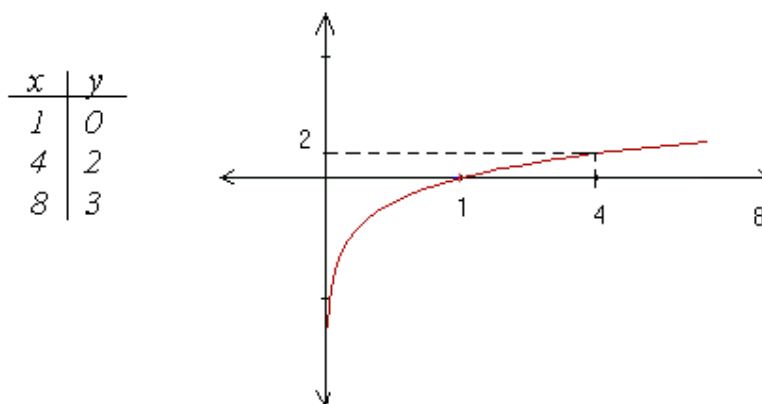
GRAFICO DE LA FUNCION LOGARITMO

La gráfica de esta función es simétrica a la gráfica de la función exponencial.
Para graficar le asignamos valores a y y al remplazarlas en la función $x = b^y$ obtenemos valores de x .

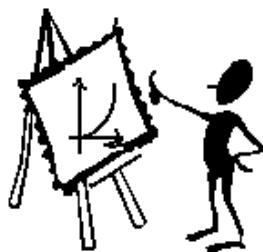
Si la base es mayor que 1, la gráfica de la función es siempre creciente, (se puede observar como crece "más deprisa", cuanto más pequeña es la base del logaritmo).

Ejemplo:

Graficar: $f(x) = \log_2 x \Leftrightarrow 2^y = x$



Ahora grafique usted las siguientes funciones logarítmicas:



Ejercicios

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

c) $f(x) = \log_2(x - 1)$

d) $f(x) = \log_5(1 - x)$

¿Qué puede observar que tienen en común estas gráficas?



Algunas aplicaciones de la función logarítmica

Los astrónomos para determinar una magnitud estelar de una estrella o planeta utilizan ciertos cálculos de carácter logarítmico. La ecuación logarítmica les permite determinar la brillantez y la magnitud.

En la física la función logarítmica tiene muchas aplicaciones entre las cuales se puede mencionar el cálculo del volumen "L" en decibeles de un sólido, para el cual se emplea la siguiente ecuación $L = 10 \cdot \log(I/I_0)$, donde I es la intensidad del sonido (la energía cayendo en una unidad de área por segundo), I_0 es la intensidad de sonido más baja que el oído humano puede oír (llamado umbral auditivo). Una conversación en voz alta tiene un ruido de fondo de 65 decibeles.

La geología como ciencia requiere del planteamiento de ecuaciones logarítmicas para el cálculo de la intensidad de un evento, tal como es el caso de un sismo. La magnitud R de un terremoto está definida como $R = \log(A/A_0)$ en la escala de Richter, donde A es la intensidad y A_0 es una constante. (A es la amplitud de un sismógrafo estándar, que está a 100 kilómetros del epicentro del terremoto).

De la función logarítmica se puede decir que:

- * El dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.
- * El recorrido es el conjunto de todos los números reales.
- * La gráfica pasa por el punto $(1, 0)$
- * Si $b > 1$, la función es creciente.
- * Si $0 < b < 1$, la función es decreciente.
- * $\log_b x = \log_b w$, si y solo si, $x = w$
- * El eje Y es una Asíntota vertical, ya que se acerca al eje Y tanto como se desee, sin llegar a cortarlo, hacia abajo en el caso en que $b > 1$ y hacia arriba en caso de $b < 1$ ("SIEMPRE POR LA DERECHA")

En la expresión: $y = \log_b x$ se tiene que

La constante " b " se llama **base**.
La variable " x " **argumento del logaritmo**.
La variable " y " **valor del logaritmo**

La siguiente tabla muestra el paralelismo entre la forma logarítmica y la forma exponencial:

Forma Logarítmica	Forma Exponencial
$\text{Log}_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\text{Log}_{10} 10.000 = 4$	$10.000 = 10^4$
$\text{Log}_4 4 = 1$	$4 = 4^1$

Ejemplo:

Calcule los logaritmos siguientes:

a) $\log_2 16 = ?$, la solución es 4, porque $2^4 = 16$

b) $\log_2 8 = ?$, la solución es 3, porque $2^3 = 8$

Ejercicios

Encuentre los siguientes logaritmos:

a) $\log_5 125 =$

b) $\log_7 \left(\frac{1}{49}\right) =$

c) $\log_{\frac{1}{25}} 5 =$

d) $\log_{16} \left(\frac{1}{8}\right) =$

e) $\log_6 1 =$

f) $\log_3 3 =$

g) $\log_{(1/5)} 625 =$

h) $\log_{49} 7 =$

Respuesta

a) 3

b) -2

c) -1/2

d) -3/4

e) 0

f) 1

g) -4

h) 1/2

Consecuencias de la definición

NOTA: Lo siguiente es válido para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$

1) **El logaritmo de 1 en cualquier base es "cero"**

$$\log_b 1 = 0$$

VIRGINIO GÓMEZ

- 2) **Si la base y el argumento son iguales, el logaritmo es 1**

$$\log_b b = 1$$

- 3) **El logaritmo de "cero" no está definido**

$$\log_b 0 \text{ no está definido}$$

- 4) **El logaritmo de un número negativo no está definido**

- 5) **El logaritmo de una potencia cuya base es igual a la base del logaritmo es el exponente de la potencia**

$$\log_b b^c = c$$

Ejercicios

Encuentre los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 2 =$

b) $\log_3 27 =$

c) $\log_4 1 =$

d) $\log_a a^{(m+1)} =$

e) $\log_3 0 =$

f) $\log_5 (-10) =$

Respuesta

a) 1 b) 3 c) 0 d) $m + 1$ e) No está definido f) No está definido

LOGARITMOS DECIMALES O COMUNES

La base de una función logarítmica puede ser cualquier número real positivo diferente de 1. En la práctica, sin embargo dos son las bases más importante cuando $b = 10$ y $b = e$ (2,718....)

Los logaritmos decimales o comunes son aquellos cuya base es 10

Cuando la base es 10 se escribe \log y se subentiende que la base es 10.

Ejemplo

$\log_{10} 100$ se escribe $\log 100$

VIRGINIO GOMEZ

VIRGINIO GOMÉZ

- Respuesta

- ## LOGARITMOS NATURALES

Los logaritmos naturales son aquellos cuya base es e

$\log_e 100$ se escribe $\ln 100$

Ejercicios

Determine usando su calculadora los siguientes logaritmos (use tres decimales):

a) $\ln 2 =$

b) $\ln 234 =$

c) $\ln 5 =$

d) $2 \ln 3 - \ln 4 =$

e) $3 \ln 2 + 5 \ln 3 - \ln 1 =$

f) $(\ln 6 - 4 \ln 2)^2 =$

g) $\ln e^{1/2} =$

Respuesta

a) 0,693

b) 5,455

c) 1,609

d) 0,811

e) 7,573

f) 0,962

g) $1/2 = 0,5$

Muchas veces conviene cambiar la base del logaritmo original a una base conocida. Para esto necesitamos la siguiente definición:

FORMULA DE CAMBIO DE BASE

Si " a " y " b " son números positivos diferentes de 1, entonces para cualquier número positivo N se cumple que:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Ejemplo

Usando la forma anterior, encuentre el valor de $\log_6 18$, usando su calculadora

Respuesta

En este ejercicio podemos ver que $b = 6$ y $N = 18$

Como en la calculadora es posible encontrar los logaritmos decimales, cambiaremos a base 10, entonces $a = 10$

$$\log_6 18 = \frac{\log 18}{\log 6} \approx 1,6131$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios

I) Cambie los siguientes logaritmos a la base que se pide. Deje expresado:

a) $\log_5 2$ a base 3

b) $\log_4 3$ a base 2

c) $\log_5 9$ a base 3

II) Encuentre el valor de los siguientes logaritmos usando cambio de base (3 decimales aproximados):

a) $\log_7 21 =$

b) $\log_5 214 =$

c) $\log_4 18 =$

d) $2\log_5 16 - 3\log_4 15 =$

e) $\frac{5\log_2 7}{\log_3 8} =$

VIRGINIO GÓMEZ

Respuesta

I) a) $\frac{\log_3 2}{\log_3 5}$ b) $\frac{\log_2 3}{\log_2 4}$ c) $\frac{\log_3 9}{\log_3 5}$

II)

- a) 1,565
- b) 3,334
- c) 2,085
- d) -2,415
- e) 7,416

Para poder resolver ejercicios con logaritmos es necesario que conozcamos algunas de sus leyes.



PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sean x e y números reales positivos, $b > 0 \wedge b \neq 1$ y " n " es cualquier número real.
Entonces:

- 1) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los factores del logaritmo

$$\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$$

- 2) El logaritmo de un cuociente es igual a la diferencia de los factores del logaritmo

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

- 3) El logaritmo de una potencia es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

Ahora usaremos estas propiedades para resolver los siguientes ejercicios:

Ejemplo

Escriba $\log_b (x^2 \cdot y^3)$ como suma y diferencia de logaritmos

Respuesta

$$\begin{aligned}\log_b (x^2 \cdot y^3) &= \log_b x^2 + \log_b y^3 \\ &= 2 \log_b x + 3 \log_b y\end{aligned}$$

Ejercicios

Escriba los siguientes ejercicios como suma y diferencia de logaritmos. Desarrolle al máximo:

$$a) \log_b (x^3 \cdot y^3)^{\frac{1}{2}} \qquad b) \log_b \left(\frac{x \cdot y^3 \cdot z}{b^6} \right)^3$$

$$c) \log_b \left(\frac{x^2 y}{5 x^3} \right) \qquad d) \log_2 \left(\frac{x (x^2 - y)}{\sqrt{y}} \right)$$

$$e) \log_c \left(\frac{c \sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{c^2}} \right) \qquad f) \log_b \sqrt{\frac{(x-4)(2x+7)}{x(3x+7)^2}}$$

$$g) \log_3 \left(\frac{(x^2 - 5)^4 (7x - 9)^3}{x(x+1)} \right) \qquad h) \log_5 \frac{\sqrt{125} \cdot 5^7}{5^4}$$

$$i) \log_y \frac{x \cdot z^7}{(y+1)^4}$$

Respuesta

$$a) \frac{3}{2} \log_b x + \frac{3}{2} \log_b y$$

$$b) 3 \log_b x + 9 \log_b y + 3 \log_b z - 18$$

$$c) -\log_b x + \log_b y - \log_b 5$$

$$d) \log_2 x + \log_2 (x^2 - y) - \frac{1}{2} \log_2 y$$

$$e) \frac{14}{15}$$

$$f) \frac{1}{2} \log_b (x-4) + \frac{1}{2} \log_b (2x+7) - \frac{1}{2} \log_b x - \log_b (3x+7)$$

$$g) 4 \log_3 (x^2 - 5) + 3 \log_3 (7x - 9) - \log_3 x - \log_3 (x+1)$$

h) $\frac{9}{2}$

i) $\log_y x + 7 \log_y z - 4 \log_y (y + 1)$

Veamos los casos al revés, es decir, de una suma o resta de logaritmos, escribir como un solo logaritmo

Ejemplo

Escriba como un solo logaritmo la siguiente expresión:

$$2 \log_b x - 3 \log_b y - \log_b m - \log_b y^3 = \log_b \left(\frac{x^2}{y^6 m} \right)$$

Observación

Una forma fácil de resolver estos ejercicios es **agrupar por signos**: Todos aquellos factores a los cuales precede un signo positivo (+) quedan en el numerador de la fracción, y los que tienen signo negativo (−) quedan en la fracción del denominador.

Ejercicios

Escriba como un solo logaritmo:

I) a) $3 \log_b x - \frac{1}{5} \log_b y$

b) $\frac{4}{5} \log x - 3 \log m + 5 \log n - \log b$

c) $-\log_b 3 - \log_b 4 + 4 \log_b m + \log_b x + \log_b w$

d) $\log(x + y) - \log(x - y)$

e) $\log m + \log n - \frac{1}{3} \log a - 5 \log b - \frac{1}{4} \log h$

f) $\log_b m + \log_b p - \frac{1}{5} \log_b r$

g) $\log_a n - \log_a q + 5 \log_a r + \frac{1}{2} \log_a f$

II) Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de los logaritmos

a) $\log \frac{27}{28} + \log \sqrt{98} + \log \frac{\sqrt{8}}{9} = \log 3$

VIRGINIO GOMEZ

$$b) \frac{1}{4} \log(x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{4} \log \frac{x+1}{x+2} = \log \sqrt{x+1}$$

Respuesta

$$a) \log_b \frac{x^3}{\sqrt[5]{y}}$$

$$b) \log \frac{\sqrt[5]{x^4} \cdot n^5}{m^3 \cdot b}$$

$$c) \log_b \frac{m^4 \cdot x \cdot w}{12}$$

$$d) \log \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$$

$$e) \log \frac{m \cdot n}{\sqrt[3]{a} \cdot b^5 \cdot \sqrt[4]{h}}$$

$$f) \log_b \frac{m \cdot p}{\sqrt[5]{r}}$$

¡¡Ahora usemos lo aprendido en las ecuaciones exponenciales!!



ECUACIONES EXPONENCIALES

Se llama Ecuación Exponencial a aquellas ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente.
Algunos ejemplos de ecuaciones son:

$$32^{-x^2} = 3$$

$$2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$$

Las ecuaciones se pueden presentar de tres formas distintas

CASO 1: Ecuaciones en las cuales se pueden igualar las bases

Algunas veces las ecuaciones exponenciales pueden resolverse consiguiendo que ambos lados de la expresión, estén expresados como potencias de la misma base e igualando posteriormente los exponentes. Para ello hay que tener muy presentes las propiedades de las potencias.

VIRGINIO GÓMEZ

Ejemplo

Resuelva la ecuación:

$$2^x = 4^{x-1} \cdot 8^{1-2x}$$

Respuesta

Dado que $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$, la ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$2^x = 4^{x-1} \cdot 8^{1-2x}$$

$$2^x = (2^2)^{x-1} \cdot (2^3)^{1-2x}$$

$$2^x = 2^{2x-2} \cdot 2^{3-6x}$$

$$2^x = 2^{-4x+1}$$

Debido a que la función exponencial es uno a uno, los exponentes se igualan:

$$x = -4x + 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

Ejercicios

Encuentre el valor de la incógnita:

1) $3^x = 3^{2x+1}$

7) $3^x = 9^{x+1} \cdot 27^{1-2x}$

2) $2^{x(x+1)} = 4$

8) $7^{2(x+1)} = 343$

3) $5^{2x+1} = 25^x \cdot 5^{3x}$

9) $3^{x+2} : 9^2 = 27^{1-x}$

4) $5^{x-1} = 1$

10) $16^{4+3x} \cdot 1^{2+x} = 4^{1+x}$

5) $3^{x(x+4)} = 3^{-4}$

11) $5^{2+x} : 25^{2x+3} = 125^2$

6) $4^{x+2} = 2^{-2x} \cdot 8^{x-1}$

12) $27^{2x} = \frac{9^{2x-1}}{3^x}$

Respuesta

1) $x = -1$

2) $x = +1, -2$

9) $5/4$

3) $x = 1/3$

4) $x = 1$

10) $-7/5$

5) $x = -2$

6) $x = -7$

11) $x = -10/3$

7) $x = 1$

8) $x = 1/2$

12) $x = -2/3$

VIRGINIO GOMEZ

CASO 2 : Ecuaciones en las cuales no es posible igualar bases

En estos casos para resolverlas debemos usar logaritmos y luego las propiedades de éstos.

Ejemplo

Encuentre el valor de x en:

$$4^x \cdot 5^x = 6$$

Respuesta

Para resolver esta ecuación aplicamos logaritmos decimales o naturales en ambos lados de la ecuación y luego usamos las propiedades de estos:

$$4^x \cdot 5^x = 6 \quad / \log$$

$$\log(4^x \cdot 5^x) = \log 6$$

$$\log 4^x + \log 5^x = \log 6$$

$$x \log 4 + x \log 5 = \log 6$$

$$x (\log 4 + \log 5) = \log 6$$

$$x = \frac{\log 6}{(\log 4 + \log 5)} \approx 0,598$$

Ejercicios

Encuentre el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales (expresar el valor de x con dos decimales aproximados):

1) $7^{2(x+1)} = 3$

2) $4^x = 27^{2x+1}$

3) $3^{x+4} = 2^{x-16}$

4) $e^{5x-2} = 30$

5) $2^x \cdot 3^{x+1} = 4$

6) $3^{1-x} \cdot 4^3 = 4^{x+5} \cdot 7^{4x}$

7) $2^{2+2x} : 4^{4-x} = 2^x \cdot 3^{-x}$

8) $2^{-x} : 4^{3+x} \cdot 6 = 1$

Respuesta

1) $x = -0,72$

2) $x = -0,63$

3) $x = -38,19$

4) $x = 1,08$

5) $x = 0,16$

6) $x = -0,16$

7) $x = -1,3$

CASO 3 : Ecuaciones en las que los términos de la ecuación están separados por sumas y/o restas que no se pueden realizar

Ejemplo: $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

Se trata de conseguir que todas las expresiones exponenciales sean iguales y lo más sencillas posibles usando las propiedades de las potencias.

$$2^x \cdot 2^{-1} + 2^x + 2^x \cdot 2^1 = 7$$

$$\frac{2^x}{2} + 2^x + 2^x \cdot 2 = 7$$

Conseguido ésto, usamos una **variable auxiliar** $u = 2^x$ con lo que nos queda la ecuación

$$\frac{u}{2} + u + 2u = 7$$

Ecuación de primer grado que sabemos resolver .

$$\frac{u}{2} + u + 2u = 7 \quad / \cdot 2$$

$$u + 2u + 4u = 14$$

$$7u = 14$$

$$u = 2$$

Una vez resuelta se obtiene $u = 2$, con lo que volviendo al cambio realizado al principio:

$$u = 2^x$$

$$2^x = 2 \quad . \text{ Ecuación exponencial del tipo que hemos trabajado antes, cuya solución es } x = 1.$$

Ejercicios

a) $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$ (sug: variable auxiliar $u = e^{2x}$)

b) $5^{x+1} + 5^x = 750$

c) $4^x - 2^x = 2$

d) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

e) $4^{x+1} + 2^{x+3} = 320$

f) $5^x + 5^{x+2} + 5^{x+4} = 651$

Respuesta

a) $x = 0,67$ y $x = 0$

b) $x = 3$

c) $x = 1$

d) $x = 2$

e) $x = 3$

f) $x = 0$

ECUACIONES LOGARITMICAS

En estas ecuaciones la incógnita se encuentra en el argumento del logaritmo.

La forma de resolverlas es la misma cualquiera que sea la base del logaritmo. Una vez encontrada la solución es conveniente verificar si esta cumple con la igualdad ya que en algunos casos, algunas de las soluciones que se obtiene para una ecuación logarítmica pueden no ser válidas.

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación : $\log(2x + 50) = 2$

Respuesta

Como el logaritmo es decimal igualamos logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}\log(2x + 50) &= \log 100 \\ 2x + 50 &= 100 \\ x &= 25\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación $\log(3 - x^2) = \log 2 + \log x$

Respuesta

$$\begin{aligned}\log(3 - x^2) &= \log 2 \cdot x \\ 3 - x^2 &= 2 \cdot x \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x + 3)(x - 1) &= 0 \\ x &= -3 \quad \text{y} \quad x = 1\end{aligned}$$

Al Sustituir el valor -3 en la ecuación inicial se obtiene

$$\log(-6) = \log 2 + \log(-3)$$

¡logaritmos de números negativos que no existen!. Por tanto la única solución es $x = 1$

Ejercicios

Encuentre el valor de x (exprese su respuesta con dos decimales):

$$1) \log_3 5x = \log_3 160 \qquad 2) \log_3(7 - x) - \log_3(1 - x) = 1$$

$$3) 2\log_2 x + 3\log_2 2 = 3\log_2 x - \log_2 \frac{1}{32}$$

$$4) \log_2 x + \log_2(x - 2) = 3 \qquad 5) \ln(6 + x) = \ln(3 + 4x)$$

$$6) \log_2 x = \log_2 5 + \log_2 9$$

$$7) \log_3 \sqrt{x^2 - 16} = 2$$

$$8) \ln(x + 1) = \ln(2x - 15) \qquad 9) \log_3(\ln 2x) = 0$$

$$10) \log(2x - 3) + \log x = \log 5 \quad 11) 4 \ln x - \ln(x + 2) = \ln x^2 + \ln 1$$

$$12) \log_6(\ln x) = \frac{1}{2}$$

$$13) \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$14) \ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$15) 2 \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$$

$$16) \log(x+3) - \log(x-6) = 1$$

Respuesta

$$1) x = 32$$

$$2) x = -2$$

$$3) x = \frac{1}{4}$$

$$4) x = 4$$

$$5) x = 1$$

$$6) x = 45$$

$$7) x = \pm \sqrt{97} \approx \pm 9,85$$

$$8) x = 16$$

$$9) x = \frac{e}{2} \approx 1,36$$

$$10) x = \frac{5}{2}$$

$$11) x = 2$$

$$12) x = e^{\sqrt{6}}$$

$$13) x_1 = -5 \quad x_2 = 5$$

$$14) x = 5 \quad (x = 0 \text{ no vale})$$

$$15) x = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} 4 \\ 9/4 \text{ no vale} \end{cases}$$

$$16) x = 4$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Como el nombre indica, son sistemas de ecuaciones donde una o más de ellas son de tipo exponencial o logarítmica. Los métodos de resolución numéricos son idénticos a los expuestos para las ecuaciones.

Ejemplo .- Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} 2^x - 3^{y-1} &= 5 & (a) \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y &= 712 & (b) \end{aligned}$$

De la ecuación (a) despejamos 2^x

$$2^x = 5 + 3^{y-1} \quad (c)$$

Reemplazamos lo obtenido en la ecuación (b)

$$\begin{aligned} 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y &= 712 \\ 2^x \cdot 2 + 8 \cdot 3^y &= 712 \\ (5 + 3^{y-1}) \cdot 2 + 8 \cdot 3^y &= 712 \end{aligned}$$

$$10 + 2 \cdot 3^{y-1} + 8 \cdot 3^y = 712$$

$$10 + 2 \cdot \frac{3^y}{3} + 8 \cdot 3^y = 712 \quad / \cdot 3$$

$$30 + 2 \cdot 3^y + 24 \cdot 3^y = 2136$$

$$\text{variable auxiliar } u = 3^y \quad (d)$$

$$30 + 2u + 24u = 2136$$

$$26u = 2136$$

$$u = 81$$

Reemplazamos en (d)

$$3^y = 81$$

$$y = 4$$

Reemplazamos en (c)

$$2^x = 5 + 3^{y-1}$$

$$2^x = 5 + 3^{4-1}$$

$$2^x = 32$$

$$x = 5$$

Por lo tanto la Sol : $x = 5$; $y = 4$. Es decir, el punto (5, 4)

Ejercicios

$$a) \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2^x - 4^{2y} = 0 \\ x - y = 15 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2^{2x+5y} = 2 \\ 2^{-x+y} = 8 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x + y = 10 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ x - y = 90 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 20 \\ e^{x-y} = 1/e \end{cases}$$

Respuesta

$$a) x = 2, y = 1$$

$$c) x = 20, y = 5$$

$$e) x = 100, y = 10$$

$$g) x = 100, y = 10$$

$$i) x = 100, y = 10$$

$$b) x = 10; y = 1$$

$$d) x = -2; y = 1$$

$$f) x = 10 + 10\sqrt{2}, y = -10 + 10\sqrt{2}$$

$$h) x = 8, y = 2$$

$$j) x = 4, y = 5$$

AUTOEVALUACION

1) Para cada una de las funciones $y = a^x$ e $y = \log_a x$. Conteste

a) ¿Puede ser negativa la y ?

b) ¿Podemos dar a x valores negativos?

2) Encuentre el valor de " x "

a) $3^{x+1} : e^x = 5^3$

b) $\log_6(\ln x) = \frac{1}{2}$

3) Demuestre las siguientes igualdades usando las propiedades de los logaritmos

$$\log a^2 + \log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a} = \frac{3}{2} \log a$$

4) Encuentre el valor de x

a) $\log(3x + 4) - \log(2 - 3x) = 2 \log 5$

b) $\log^2 x + 2 = 3 \log x$

c) $2^{x+5} \cdot 4^{3-2x} = 8^{3x+1} : 16$

5) Encuentre el valor de x e y

a) $x + y = 22$
 $\log x = 1 + \log y$

b) $\log x + 3 \log y = 5$
 $2 \log x - \log y = 3$

6) La Población mundial P en 1985 era aproximadamente 3,6 miles de (P_o) y la tasa de decrecimiento anual del 3%. Si se supone un decrecimiento continuo, donde t es el tiempo en años después de 1985 ($P = P_o \cdot e^{k \cdot t}$)

a) Calcule la población para el año 2001 (2 decimales)

b) ¿En qué año la población se reduce a la mitad?

7) Un cultivo de bacterias crece según la función $y = 1 + 3^{x/5}$ (y: miles de bacterias, x: horas).

a) ¿Cuántas había en el momento inicial?

b) ¿Y al cabo de 10 horas?

c) Calcula cuánto tiempo tardarán en duplicarse.

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta

2) a) $x = \frac{\ln 125 - \ln 3}{\ln 3 - 1}$

b) $x = e^{\sqrt{6}}$

4) a) $x = 23/39$

b) $x = 100; x = 10$

c) $x = 1$

5) a) $x = 20; y = 2$

b) $x = 100; y = 10$

6) a) $P = 2,23$ miles de millones

b) En el año 2008 se reduce a la mitad

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO V

TRIGONOMETRIA

VIRGINIO GOMEZ

TRIGONOMETRIA

Trigonometría, rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa '*medida de triángulos*'. Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna.

Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna.

Comenzemos explicando algunos conceptos básicos

Ángulos: Cuando estudiaste geometría plana se te presentó el concepto de ángulo como el conjunto de puntos sobre dos rayos (o segmentos de recta) que tienen un punto común.

En trigonometría usaremos el mismo concepto, pero ampliaremos aún más su significado.

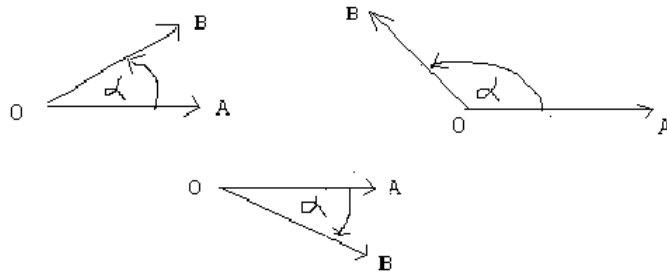


.... los dos rayos se llaman **lados** y el punto común **vértice**.

Generalmente los ángulos se denotan por tres letras mayúsculas ($A, B, C \dots$) colocadas ~~cada una~~ en cada rayo del ángulo y otra en el vértice (O).

Otra forma de designar un ángulo es usando letras griegas minúsculas, pero estas se encuentran dentro de la región angular, lo cual representa en realidad, la medida del ángulo. Las más usadas son α (alfa), β (Beta), γ (gama), θ (teta), ϕ (fi), etc..

Las figuras que se muestran a continuación presentan algunas formas que tiene un ángulo.

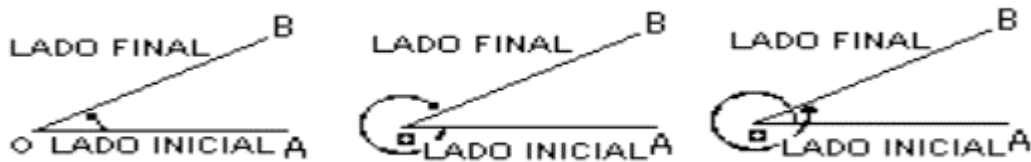


Estos ángulos se leen ángulo AOB , o bien ángulo α .

Para muchas de las aplicaciones de la trigonometría, se requiere un concepto más general de un ángulo.

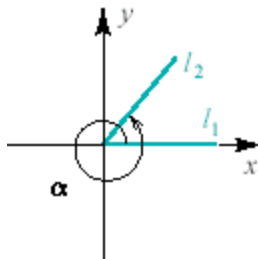
Se pretende determinar la rotación usada, al ir de un lado de éste al otro lado.

De acuerdo a esto: Para formar un ángulo α se considera un **lado inicial** en una posición fija y al otro como **lado final o terminal**.



La medida de un ángulo α está asociada a la rotación del ángulo. Por ejemplo:

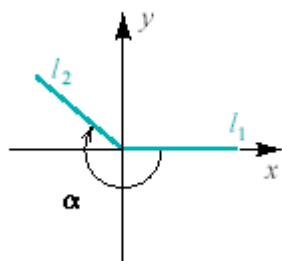
a) Si la rotación es en sentido contrario a las manecillas del reloj, la medida del ángulo es **positiva**.



medida de $\alpha > 0$

Por ejemplo $\alpha = 40^\circ$

b) Si la rotación es en el mismo sentido de las manecillas del reloj, la medida del ángulo es **negativa**



medida de $\alpha < 0$

Por ejemplo $\alpha = -240^\circ$

Observe que para los dos casos presentados la medida es sólo aproximada.

¡ OBSERVACION! : Con frecuencia usaremos el nombre de ángulo como medida del ángulo. Esto no debe confundirlo ya que en el contexto general siempre se aclara cuál es el significado que se pretende.

¿Y cómo se mide un ángulo ? ...

La medida de un ángulo está dada de acuerdo a ciertos sistemas , los cuales son usados más fácilmente en un campo o en otro .

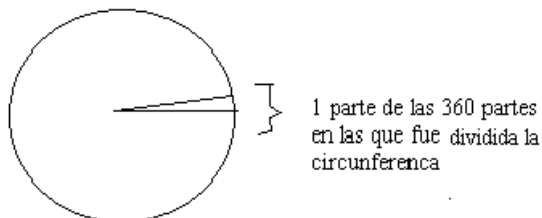
Nosotros estudiaremos dos sistemas y que además son los más usados : el sistema de grados sexagesimales al cual sólo se le dice grados y el sistema de radianes.

a) Medición en grados:

Este es el más conocido y es empleado por los topógrafos y navegantes.

En este sistema, se considera al ángulo situado con su vértice en el centro de un círculo cuya circunferencia se divide en 360 partes iguales.

Cada una de estas partes tiene la medida de un grado, el cual se escribe 1° .



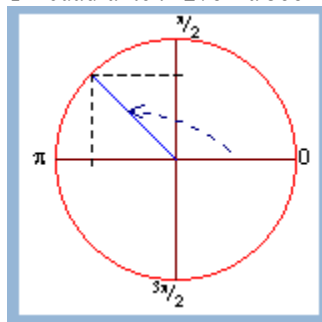
En este caso la circunferencia queda dividida en cuatro partes iguales de 90° ($\pi/2$) cada una, que va desde 0° a 360° (2π)

1^{er} cuadrante : 0° a 90°

2^{do} cuadrante : 90° a 180°

3^{er} cuadrante : 180° a 270°

4^{to} cuadrante : 270° a 360°

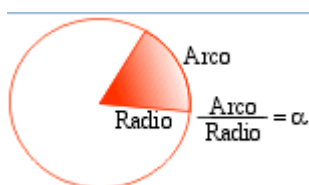


b) Medición en radianes:

Cuando se quiso utilizar el sistema sexagesimal en física, para poder calcular el camino desarrollado por alguna partícula en trayectoria circular, se encontraron que este sistema no los ayudaba pues, matemáticamente, no está relacionado con el arco que describe el cuerpo al moverse. De esa manera se "inventó" otro sistema angular, el sistema circular, donde la medida del ángulo se obtiene al dividir el arco y el radio de la circunferencia. En este sistema un ángulo extendido (al dividir el arco por el radio) mide 3,14 (que es el valor aproximado de " π "). De esa manera un giro completo (que es lo mismo que dos ángulos extendidos) mide 2π . El ángulo se denomina radian.

OBSERVACION

La palabra radianes no se acostumbra escribir



¿Es posible escribir la medida de un ángulo usando los dos sistemas ?... Si, ya que la expresión $2\pi r$ que es el perímetro de la circunferencia, dice que la circunferencia tiene 2π arcos de longitud r alrededor de ella (un arco de 360°). Entonces un ángulo de 360° mide 2π radianes y un ángulo de 180° mide π radianes.

$$360^\circ = 2\pi$$

$$180^\circ = \pi$$

Transformación de la medida de un ángulo de un sistema a otro.

1) Para convertir la medida de un ángulo dado en grados a radianes basta multiplicar por $\frac{\pi}{180}$

Esto se deduce de la expresión $180^\circ = \pi \text{ rad.} \quad / \div 180$

$$\frac{180^\circ}{180} = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Ejemplos :

Convierta a radianes, los siguientes ángulos dados en grados y exprese la respuesta en términos de π ,

a) 60°

$$60^\circ = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$$
$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

Simplificando se obtiene

b) $105^\circ = 105^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$

$$105^\circ = \frac{7}{12}\pi$$

Simplificando se obtiene

2) Para convertir los ángulos dados de radianes a grados basta multiplicar por $\frac{180}{\pi}$

Esto se deduce de la expresión $180^\circ = \pi \text{ rad.} \quad / \div \pi$

$$\frac{180}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} \text{ rad.}$$

$$\frac{180}{\pi} = 1 \text{ radián}$$

Ejemplos:

Convierta a grados los siguientes ángulos dados en radianes

a) $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Simplificando se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

b) $\frac{\pi}{7}$

$$\frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{7} \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{7} = \frac{180^\circ}{7}$$

$$\frac{\pi}{7} = 25,71^\circ$$

Ejercicios :

1) Convierta cada una de los siguientes ángulos dados en grados a radianes, exprese la solución en términos de π .

a) $135^\circ =$

e) $270^\circ =$

b) $75^\circ =$

f) $190^\circ =$

c) $65^\circ =$

g) $360^\circ =$

d) $180^\circ =$

2) Convierta cada uno de los siguientes ángulos dados en radianes a grados

a) $\frac{4}{3}\pi =$

e) $\frac{1}{2}\pi =$

b) $\frac{5}{6}\pi =$

f) $2,15 \text{ rad} =$

c) $\frac{2}{3}\pi =$

d) $4,52 \text{ rad} =$

Respuesta

1)

a) $3\pi/4$

b) $5\pi/12$

c) $13\pi/36$

d) π

e) $3\pi/2$

f) $19\pi/18$

g) 2π

2)

a) 240°

b) 150°

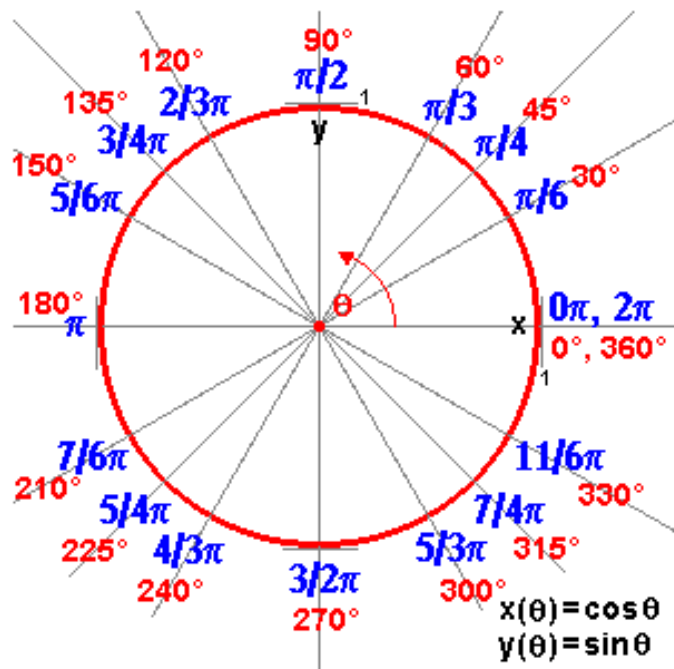
c) 120°

d) $258,9^\circ$

e) 90°

f) $123,2^\circ$

Resumiendo: Los ángulos más usados y sus equivalentes se muestran en la circunferencia siguiente



Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°

ANGULOS COTERMINALES

¿Qué pasa si un ángulo es mayor a 360° (2π) o es negativo? En estos casos recurriremos a otro concepto en ángulos y que es muy útil, el de los ángulo Coterminales.

Se llaman **Ángulos Coterminales** a aquellos que tiene los mismos lados inicial y terminal, y por lo tanto tiene las mismas características. Estos ángulos siempre tienen medidas de grados que difieren en un múltiplo de 360° .

I) Si el ángulo es mayor a 360°

Los ángulo 1050° y 330° son coterminales ya que tiene los mismos lados inicial y terminal. Esto se puede ver más facilmente haciendo unos cálculos previos.

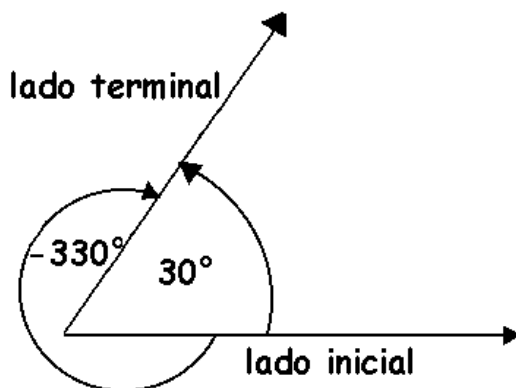
Como el ángulo 1050° es mayor que 360° , restamos a éste un múltiplo de 360° de la siguiente forma

$$1050^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 330^\circ$$

II) Si el ángulo es negativo

Los ángulo 30° y -330° son coterminales, ya que -330° tiene una rotación negativa y para determinar su ángulo coterminal le sumamos un múltiplo de 360° , porque si le restáramos un múltiplo de 360° el valor absoluto del ángulo sería mas grande.

$$-330^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 30^\circ$$



¿Y si el ángulo está dado en radianes ?... Se suma o resta a éste un múltiplo de 2π , según sea el caso.

Ejemplo

Determine un ángulo coterminal a $\frac{15}{7}\pi$

Como este ángulo es mayor a 2π le restamos esta rotación

$$\frac{15}{7}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{7}$$

Resumiendo :

a) Si un ángulo es mayor a 360° , como en el ejemplo 1, le **restamos** un múltiplo de 360° (o un múltiplo de 2π).

b) Si un ángulo es negativo, como en el ejemplo 2, le **sumamos** un múltiplo de 360° (o un múltiplo de 2π).

Ejercicios

Determine el ángulo coterminal de los siguientes ángulos , exprese este ángulo entre 0° y 360° o bien entre 0 y 2π , según se pida.

1) $500^\circ =$

2) $900^\circ =$

3) $5\pi =$

4) -450°

5) 5130°

6) -95°

7) $\frac{13\pi}{2} =$

8) $-\frac{5\pi}{2}$

9) 3720°

10) 1935°

11) 2040°

12) 3150°

13) -200°

14) -820°

Respuesta

1) 140°

2) 90°

3) 180°

4) 265°

5) π

6) $\pi/2$

7) 270°

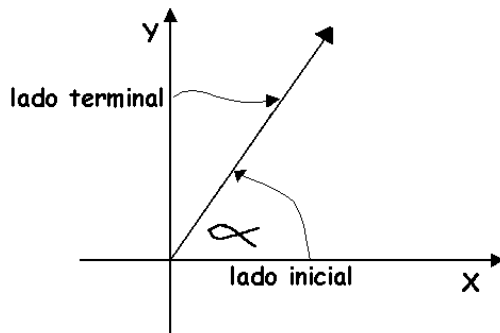
9) 120°

10) 135° 11) 240° 12) 270° 13) 160°

14) 260°

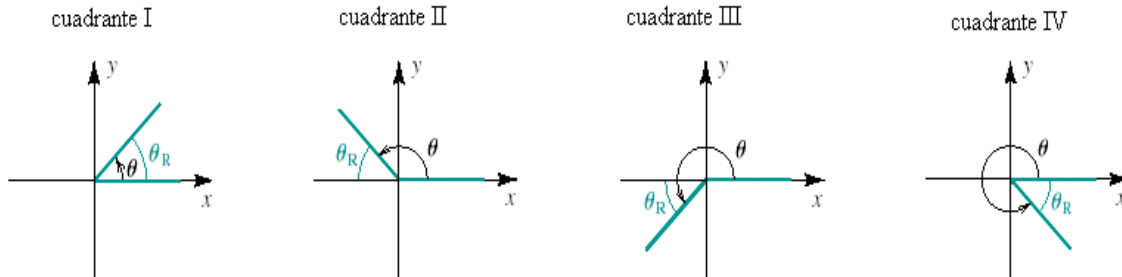
ANGULO EN POSICIÓN ESTANDAR

En un sistema de coordenadas rectangulares se dice que un ángulo está en **posición estándar** si su vértice está en el origen y el lado inicial en el eje positivo de las x como se muestra en la figura.



Si el lado terminal de un ángulo en posición estándar coincide con un eje coordenado, el ángulo se denomina **ángulo cuadrantal**. Si el lado terminal no coincide con un eje coordenado, entonces el ángulo se menciona en términos del cuadrante en el cual está el lado terminal.

Por ejemplo



Ejemplo :Algunos ángulos del primer cuadrante son 30° , 60° , -350°

Algunos ángulos del segundo cuadrante son 95° , $\frac{5}{6}\pi$

Algunos ángulos del tercer cuadrante son 230° , $\frac{10}{9}\pi$

Algunos ángulos del cuarto cuadrante son 300° , $\frac{11\pi}{6}$

Ejercicios

Determine en qué cuadrantes se encuentran los siguientes ángulos

a) $152^\circ =$

b) $33^\circ =$

c) $-75^\circ =$

d) $301^\circ =$

Respuesta

- a) 152° esté en el II cuadrante
- b) 33° está en el I cuadrante
- c) $-75^\circ = -75^\circ + 360^\circ = 285^\circ$ está en el IV cuadrante
- d) 301° está en el IV cuadrante

Una de las *Aplicaciones de los Angulos dados en radianes* se refiere a la **velocidad angular**.

Observe que cuando una rueda gira alrededor de su eje a una velocidad constante, el número de radianes que se recorre por unidad de tiempo un radio fijo sobre la rueda se denomina velocidad angular de la rueda.

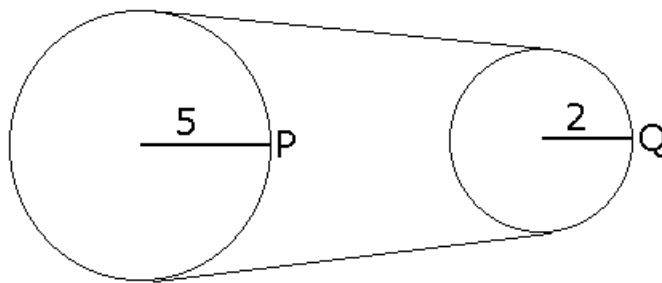
La letra griega ω (omega) con frecuencia se usa para denotar la velocidad angular (en radianes). Si una rueda de radio r unidades gira sin patinar siguiendo una trayectoria recta, entonces la velocidad en el centro está dada por la fórmula. v es velocidad lineal

$$v = r \cdot \omega$$

Ejemplo:

Una correa de transmisión conecta una polea de radio 2 pulgadas con otra de radio de 5 pulgadas. Si la polea mayor gira 10 radianes. ¿Cuántos radianes girará la más pequeña ?

Respuesta



Cuando la polea mayor gira 10 radianes, el punto P sobre la circunferencia mayor se moverá la misma distancia (longitud de arco).

Para la polea mayor los datos son ,

$$r = 5 \text{ pulgadas}$$

$$\omega = 10 \text{ radianes}$$

$$\text{luego } v = 5 \cdot 10$$

$$v = 50 \text{ pulgadas}$$

Entonces para la rueda menor se tienen los siguientes datos

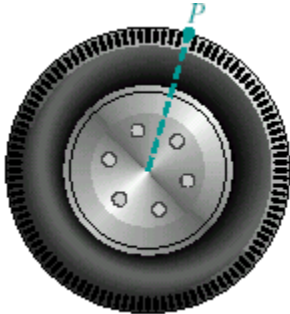
$$\begin{aligned}v &= 50 \text{ pulgadas} \\r &= 2 \text{ pulgadas} \\w &= ?\end{aligned}$$

$$w = \frac{v}{r} \Rightarrow w = \frac{50}{2} = 25 \text{ radianes}$$

Por lo tanto la polea menor girará 25 radianes

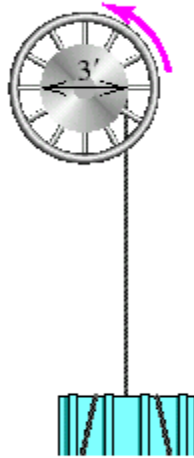
Ejercicios

- 1) La rueda delantera de una bicicleta tiene un diámetro de 40 cm y la trasera 60 cm. ¿Qué ángulo en radianes gira la rueda delantera, si la trasera gira 8 radianes?.
- 2) Suponga que la rueda de un automovil tiene un diámetro 1.5 pies, cuya frecuencia es de 1600 rpm (revoluciones por minutos)
 - a) Encuentre la velocidad angular de la rueda
 - b) Encuentre la velocidad lineal de un punto P de la periferia de la rueda



- 3) Sea el siguiente winche de diametro 3 pies
 - a) Determine el desplazamiento de la carga de levante si la velocidad angular es $7\pi/4$
 - b) Encuentre el ángulo de rotación (en radianes) del winche para el desplazamiento anterior.

VIRGINIO GOMEZ



Respuesta

1) 12

2)

a) La rueda gira un ángulo de 2π en un minuto. El ángulo generado por la línea OP (O centro de la rueda) es $w = (1600) 2\pi = 3200\pi$ rpm.

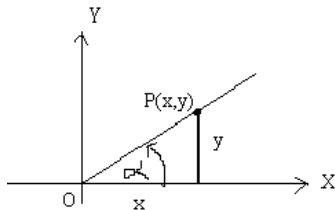
b) $v = r \cdot w$

$$v = 0.75 (3200\pi) = 2400 \pi \text{ pies/m.}$$

3) a) $v = 21\pi/8$ $w = 21\pi/12$

Funciones trigonométricas de un ángulo en posición estándar o normal

Para definir las funciones trigonométricas de un ángulo α , primero se coloca a éste en posición estándar y después se selecciona un punto $P(x,y)$ sobre el lado final del recorrido, así como se muestra en la figura.



Definición:

Suponga que el ángulo α está en posición normal y además que $P(x,y)$ es un punto sobre el lado terminal de α . Si denotamos la distancia OP como r . Entonces se definen las seis funciones trigonométricas en función de la abscisa x y la ordenada y .

El **coseno de α** se define como la razón $\frac{x}{r}$, es decir, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

El **seno de α** se define como la razón $\frac{y}{r}$, es decir, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

La **tangente de α** se define como la razón $\frac{y}{x}$, es decir, $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

La **cotangente de α** se define como la razón $\frac{x}{y}$, es decir, $\cot \alpha = \frac{x}{y}$

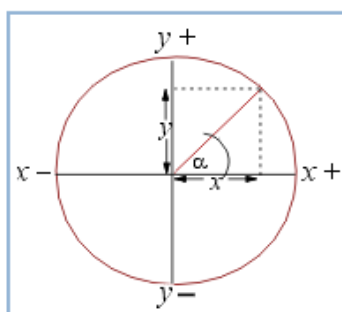
La **cosecante de α** se define como la razón $\frac{r}{y}$, es decir, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$

La **secante de α** se define como la razón $\frac{r}{x}$, es decir, $\sec \alpha = \frac{r}{x}$

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS SEGUN EL CUADRANTE

Los signos de las Funciones Trigonómicas dependen del cuadrante donde se encuentren. Así

- Primer Cuadrante



$$\sin \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip.}} = \frac{y}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip.}} = \frac{x}{r}; \quad \tan \alpha = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{y}{x}$$

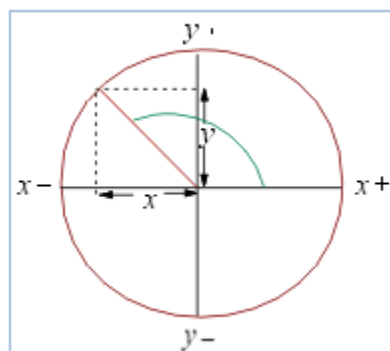
En el primer cuadrante, vemos que: el cateto adyacente se ubica sobre el eje X, así que lo denominaremos "x"; al cateto opuesto, que se ubica sobre el eje Y, lo llamaremos "y". La hipotenusa, que es el radio de la circunferencia, la designaremos "r".

Ya que "x", "y", "r", son positivas, entonces, **Todas las funciones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas.**

sen	cosec	tg	cotg	cos	sec
+	+	+	+	+	+

Segundo Cuadrante

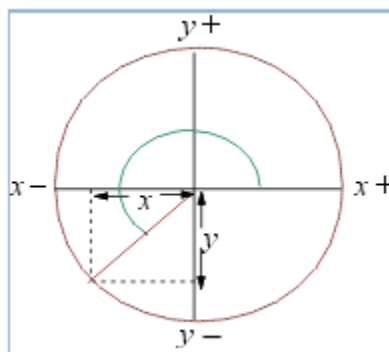
En el segundo cuadrante, el cateto adyacente cae sobre el eje negativo de las X , mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje positivo de las Y . El radio (la hipotenusa) sigue siendo positiva en todos los cuadrantes. Por lo tanto: **el seno y la cosecante son positivas** y el coseno, la tangente y sus recíprocas (secante y cotangente) tienen resultados negativos.



sen	cosec	tg	cotg	cos	sec
+	+	-	-	-	-

Tercer Cuadrante

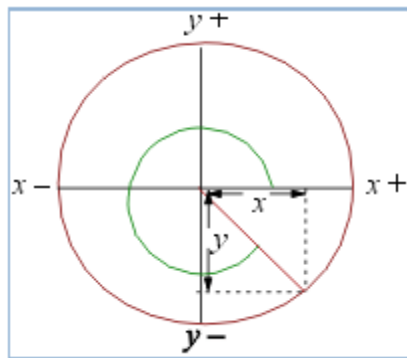
En el tercer cuadrante, tanto el cateto adyacente como el cateto opuesto tienen sus signos negativos, ya que caen sobre la parte negativa de los ejes X e Y respectivamente. En este caso **la tangente y la cotangente son positivas**. El seno y el coseno (y sus recíprocas, cosecante y secante) son Negativas



sen	cosec	tg	cotg	cos	sec
-	-	+	+	-	-

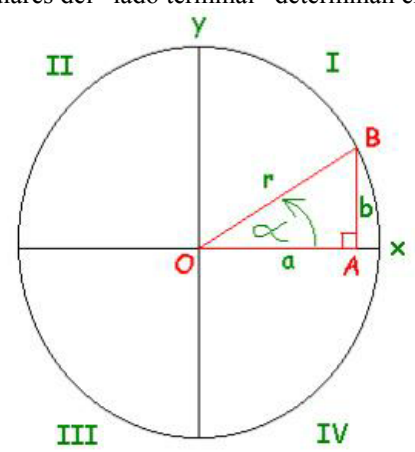
Cuarto Cuadrante

En el cuarto cuadrante, el cateto adyacente vuelve a estar sobre el eje positivo de las X , mientras que el cateto opuesto sigue sobre el eje negativo de las y . En este caso, las únicas funciones cuyo resultado será positivo son el coseno y la secante.

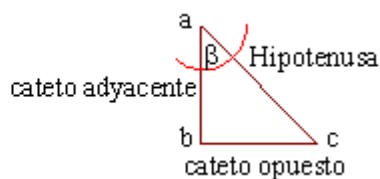
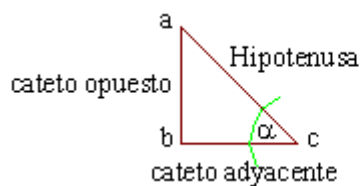


sen	cosec	tg	cotg	cos	sec
-	-	-	-	+	+

Por lo tanto, Consideramos un círculo de radio “ r ” dividido en cuatro cuadrantes (I, II, III y IV) por un sistema rectangular de coordenadas cuyo origen se hace coincidir con el centro del círculo. Sea un ángulo α medido desde el semieje horizontal positivo en sentido antihorario. Las proyecciones rectangulares del lado terminal determinan en cada cuadrante un triángulo rectángulo de hipotenusa “ r ”



Usaremos las definiciones anteriormente vista de la Funciones Trigonómicas y las llevaremos a un triángulo rectángulo, como se ve en la figura. Observe que los catetos adyacentes y opuestos varían según sea la ubicación del ángulo :



Para α

El seno de $\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, es decir, $\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$

El coseno de $\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$, es decir, $\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$

La **tangente de α** = $\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$, es decir, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

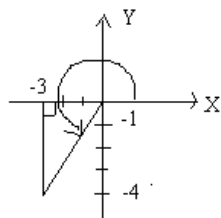
La **cotangente de α** = $\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$, es decir, $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

La **cosecante de α** = $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$, es decir, $\text{cosec } \alpha = \frac{c}{a}$

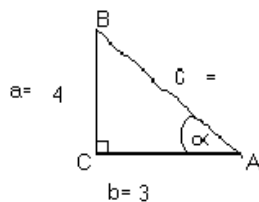
La **secante de α** = $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$, es decir, $\sec \alpha = \frac{c}{b}$

Ejemplo

Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas, si el punto $P(-3, 4)$ pertenece al lado terminal del ángulo asociado.



El triángulo de referencia es :



Para encontrar c , lo determinamos a través del Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 4^2 + 3^2 &= c^2 \\ 16 + 9 &= c^2 \\ 25 &= c^2 \\ 5 &= c \end{aligned}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{cotang } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{5}{3}$$

Pero a cada función hay que llevarla al cuadrante, en este caso el tercero, por lo tanto, van a cambiar de signo todos excepto la tangente y la cotangente

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cotang} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3}$$

Ejercicios

I) Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas, si los puntos P pertenecen al lado terminal del ángulo asociado.

a) $P(-1, -3)$

b) $P(2, 5)$

c) $P(5, -2)$

d) $P(-3, 6)$

II)

a) Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 4/5$, calcule las demás razones trigonométricas de α sabiendo que es un ángulo del segundo cuadrante.

b) Sabiendo que $\cos \alpha = -1/2$, sin utilizar la calculadora, obtener las demás razones trigonométricas de α , sabiendo que α es un ángulo del segundo cuadrante.

III) Calcule las siguientes expresiones:

a) $5 \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$, si $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$

b) $2 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - 2 \operatorname{cosec} \alpha$, si $\sec \alpha = 2$

Respuesta

I)

a) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tang} \alpha = 3$

$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sec \alpha = -\sqrt{10}$, $\operatorname{cotang} \alpha = \frac{1}{3}$

b) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\operatorname{tang} \alpha = \frac{5}{2}$

$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{29}}{5}$, $\sec \alpha = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\operatorname{cotang} \alpha = \frac{2}{5}$

c) $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\operatorname{tang} \alpha = -\frac{2}{5}$

$\operatorname{cosec} \alpha = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, $\sec \alpha = \frac{\sqrt{29}}{5}$, $\operatorname{cotang} \alpha = -\frac{5}{2}$

$$d) \operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{\sqrt{45}}, \quad \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{45}}, \quad \operatorname{tang} \alpha = -2$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\sqrt{45}}{6}, \quad \sec \alpha = -\frac{\sqrt{45}}{3}, \quad \operatorname{cotang} \alpha = -\frac{1}{2}$$

III)

$$a) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{tang} \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4}, \quad \sec \alpha = -\frac{5}{3}, \quad \operatorname{cotang} \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$b) \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tang} \alpha = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sec \alpha = -2, \quad \operatorname{cotang} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$IV) \quad a) 4,1333.. \\ b) -0,07735$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se obtienen las relaciones llamadas también **recíprocas**.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha}$$

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

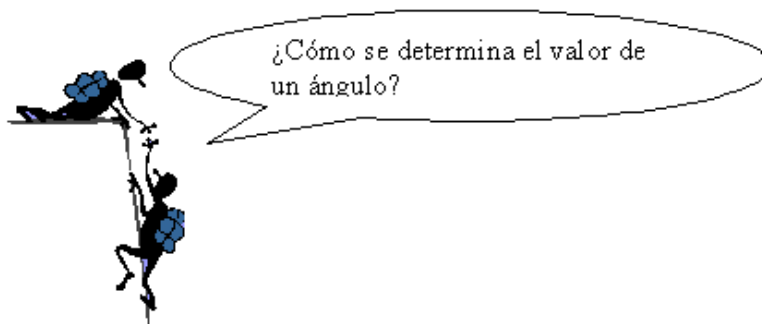
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tag} \alpha}$$

Supongamos que necesitamos determinar un ángulo conociendo sólo el valor de él a través de una función trigonométrica. Por ejemplo, usted sabe que

$$\operatorname{sen} \theta = 0,848$$



Para determinarlo usted debe hacer uso de su calculadora científica y usar la función **INV** de ella.

Pero **OJO**, fíjese si esta está en modo **rad** (radianes) o **deg** (grados sexagesimales)

Ejemplo

$$\text{sen } \theta = 0,848 \Rightarrow \boxed{\text{INV}}$$

$$\text{en deg : } \theta = 57,99^\circ$$

$$\text{en rad: } \theta = 1,012 \text{ rad}$$

Ejercicios

Determine el ángulo θ si se sabe que (determine el ángulo en radianes y en grados sexagesimales, 2 decimales aproximados)

1. — $\cos \theta = -0,940$

6. — $\cotag \theta = 2,15$

2. — $\tan \theta = -2,747$

7. — $\sec \theta = 3,16$

3. — $\csc \theta = 1,155$

4. — $\text{sen } \theta = 0,996$

5. — $\csc \theta = 1,12$

Respuesta

1. — $\theta = 160^\circ$
 $\theta = 2,79 \text{ rad}$

3. — $\theta = 60^\circ$
 $\theta = 1,05 \text{ rad}$

2. — $\theta = 290^\circ$
 $\theta = 1,22 \text{ rad}$

4. — $\theta = 85^\circ$
 $\theta = 1,48 \text{ rad}$

5. — $\theta = 63^\circ$
 $\theta = 1,10 \text{ rad}$

6. — $\theta = 25^\circ$
 $\theta = 0,43 \text{ rad}$

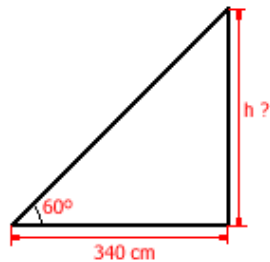
7. — $\theta = 71,5^\circ$
 $\theta = 1.25$

Problemas con enunciado usando como referencia un Triángulo Rectángulo

Para encontrar un lado de un triángulo rectángulo cuando se conocen un ángulo y un lado, pueden utilizarse las funciones trigonométricas: una función y su recíproco. Al utilizar la calculadora se eligen las funciones seno, coseno y tangente, ya que estas funciones están representadas en las teclas de ella.

Ejemplo:

- Calcula la altura (h) del siguiente triángulo rectángulo

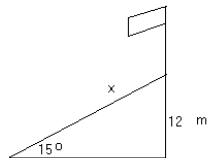


Sabiendo que $\tan 60^\circ = \frac{h}{340}$

$$\begin{aligned}\tan 60^\circ \cdot 340 &= h \\ h &= 588,9 \text{ cm}\end{aligned}$$

Ejemplo

Un cable de sujeción, se amarra a 12 m de la base de un mástil, y el cable forma un ángulo de 15° con el suelo. ¿Cuánto mide dicho cable?



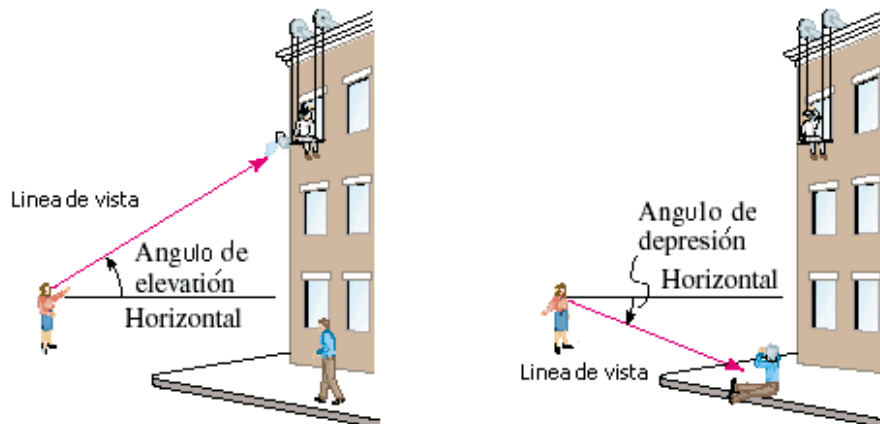
Determinamos el valor de x a través de $\sin 15^\circ = \frac{12}{x}$. Despejamos x

y obtenemos $x = 46,3644$

ANGULOS DE ELEVACION Y DE DEPRESION

Un **ángulo de depresión** es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador, hasta un objeto abajo de ésta.

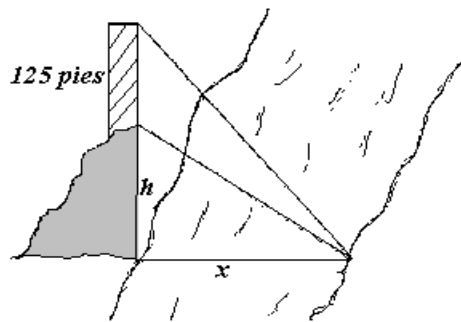
Un **ángulo de elevación** es aquel que se forma sobre la horizontal y el objeto que se observa.



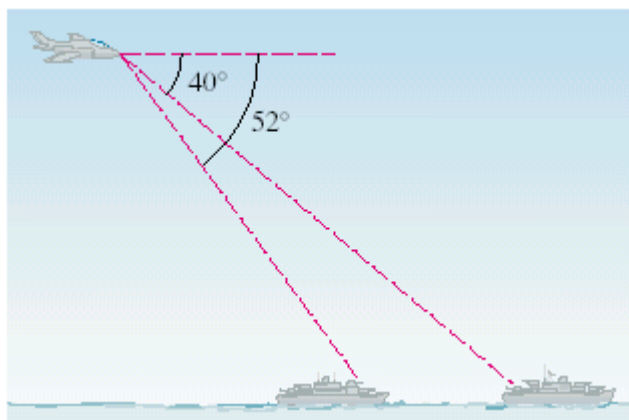
Ejercicios

- 1) Un edificio proyecta una sombra de 150m. cuando el sol forma un ángulo de $20^{\circ} 30'$ sobre el horizonte, calcular la altura del edificio.
- 2) Un árbol de 100 pies de altura proyecta una sombra de 120 pies de longitud. Encuentre el ángulo de elevación del sol
- 3) Una escalera está apoyada contra la pared de un edificio y su base se encuentra a una distancia de 12 pies del edificio. ¿A qué altura está el extremo superior de la escalera y cuál es la longitud si el ángulo que forma con el suelo es de 70° ?
- 4) De lo alto de un faro, de 120 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un bote es de 15° . ¿A qué distancia está el bote del faro?
- 5) Encuentre la altura de un árbol, si el ángulo de elevación de su parte superior cambia de 20° a 40° cuando el observador avanza 75 m hacia la base de este.
- 6) Un hombre maneja 500 m a lo largo de un camino inclinado 20° con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida?
- 7) Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con el suelo. Si la parte quebrada hace un ángulo de 50° con el suelo y si la copa del árbol esta ahora a 6 metros de su base. ¿Qué altura tenía el árbol?.

- 8) Dos edificios de cubierta plana distan 18 metros. Del techo del más bajo de 12 metros de alto, el ángulo de elevación del borde del techo del más alto es de 40° . ¿Cuál es la altura del edificio más alto?
- 9) Dos caminos rectos se cortan bajo un ángulo de 75° . Hallar la mínima distancia de uno de ellos a una estación de gasolina que está sobre el otro camino a 300 metros de la encrucijada.
- 10) Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 100 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 30° con nuestra orilla. calcular la anchura del río (ver figura)
- 11) Desde un punto se observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de 30° , si avanzamos 30 metros, el ángulo pasa a ser de 45° . Calcular la altura del edificio.
- 12) Un aeroplano parte de un aeródromo elevándose, formando un ángulo de $8^\circ 40'$ con la horizontal ¿a cuántos metros pasará de la cumbre de un cerro de 110 m situado a 1000 m del aeródromo?
- 13) Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se encuentra una torre de 125 pies de altura. Desde lo alto de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es $28^\circ 40'$ y desde la base de la torre el ángulo de depresión del mismo punto es $18^\circ 20'$. Calcule cuánto mide el ancho del río y la altura del peñasco.

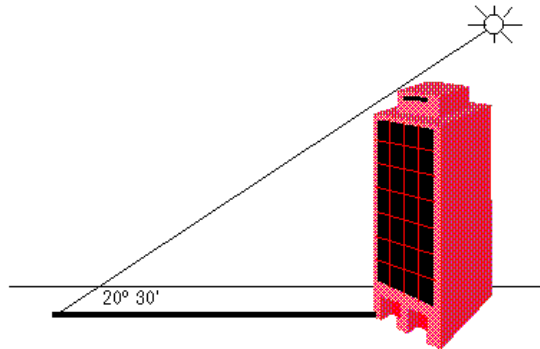


- 14) Un piloto mide los ángulos de depresión de dos barcos los cuales son 40° y 52° . Si el piloto está volando a una altura de 35 000 pies. Encuentre la distancia entre los dos barcos.

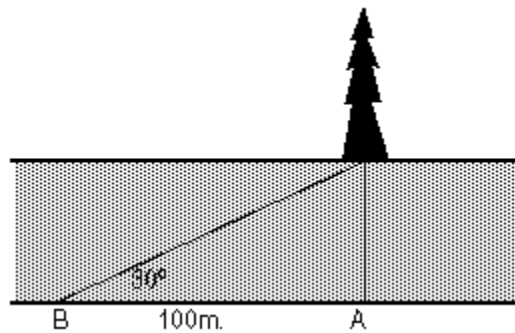


Respuesta

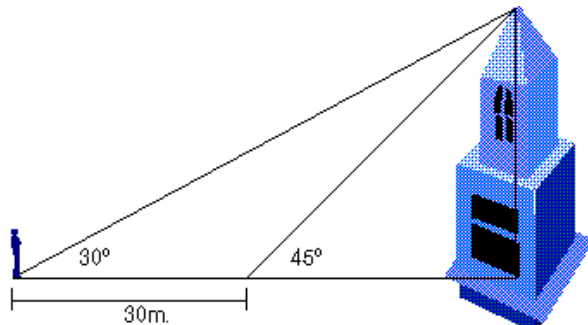
1)



- 2) $56,08\text{ m}$
 3) $39,8^\circ$
 3) altura del edificio 33 *pies*
 longitud de la escalera 35,12 *pies*
 4) $h = 447,8\text{ km}$
 5) $h = 48,2\text{ m}$
 6) $h = 171\text{ m}$
 7) La altura del árbol es de 16,48 metros.
 8) La altura del edificio mas alto es 27 metros.
 9) La mínima distancia es 291 metros.
 10)



11) 41 m



- 12) 30,5
 13) 580 *p* el río, 192 *p* el peñasco

VIRGINIO GOMEZ

14) 1003 p

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRIA

Las razones trigonométricas se pueden utilizar, fundamentalmente, para resolver triángulos, así como para resolver diferentes situaciones problemáticas en otras ciencias.

En Topografía se puede determinar la altura de un edificio, teniendo la base y el ángulo. Por ejemplo, la torre de Pisa, fue construida sobre una base de arena poco consistente; debido a ello ésta se apartaba cada vez más de su vertical. Originalmente tenía una altura de 54,6 m, aproximadamente. En 1990 un observador situado a 46 m del centro de la

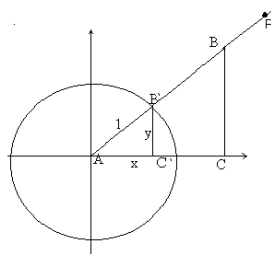
base de la torre, determinó un ángulo de elevación de 54° a la punta de la torre, el observador para determinar al desplazamiento (hundimiento en el suelo es muy pequeño, comparado con la altura de la torre) aplicó la ley del seno para determinar el ángulo de inclinación y la ley del coseno para determinar el desplazamiento de la torre.

En Óptica, la trigonometría se aplica en las dispersiones en prisma o cuando un rayo de luz atraviesa una placa de cierto material.

En la Aviación, si dos aviones parten de una base aérea a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

El capitán de un barco puede determinar el rumbo equivocado del barco, siempre en línea recta, ordenando modificar el rumbo en grado para dirigirse directamente al punto destino correcto.

Volvamos ahora a la circunferencia. En la figura que se muestra a continuación, el círculo tiene un radio de 1 unidad.



Usando semejanza de triángulo se puede observar que los triángulos $A'B'C'$ y ABC son semejantes, por lo tanto no existe diferencia en cuanto al lugar del lado terminal del ángulo en que se aleja P . Usando este concepto definimos las funciones trigonométricas seno y coseno de la siguiente forma:

Como $r = 1$ entonces

$$\text{sen } \alpha = y \quad \text{y} \quad \text{cos } \alpha = x$$

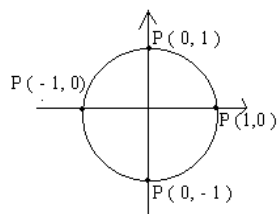
De aquí podemos ver que el $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$ son iguales a las coordenadas x e y del punto en el círculo unitario.

Es decir, $P(x, y) = P(\text{cos } \alpha, \text{sen } \alpha)$
Ángulos Cuadrantales

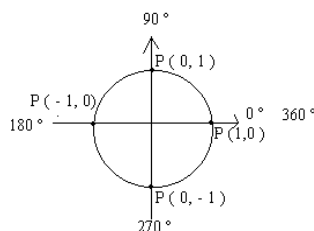
Un ángulo cuadrantal es aquel en el cual el lado terminal del ángulo coincide con un eje del sistema cartesiano. Estos ángulos son 0° , 90° , 180° , 270° y 360° en grados sexagesimales o bien entre 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3}{2}\pi$ y 2π en radianes.

Coordenadas de puntos en un círculo unitario

Sea una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, de centro el origen y radio una unidad, entonces podemos asignar un punto $P(x, y)$ en la circunferencia.



Los ángulos cuadrantales los hacemos coincidir con los ejes:



La tabla que resulta con los datos dados es:

ángulo α°	ángulo α rad	sen α	cos α	tang α	cosec α	sec α	cotang α
$0^\circ = 360^\circ$	0	0	1	0	indeterm.	1	indeterm.
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	indeterm.	1	indeterm.	0
180°	π	0	-1	0	indeterm.	-1	indeterm.
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	indeterm.	-1	indeterm.	0

Ángulos especiales : 30° , 45° y 60°

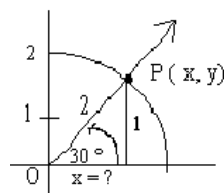
Existen algunos ángulos especiales que mediante nociones geométricas simple permiten encontrar los valores exactos de las funciones trigonométricas.

Estos ángulos son 30° , 45° y 60° correspondientes a los números

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ respectivamente.

En la siguiente figura se muestra un ángulo de 30° en posición estándar

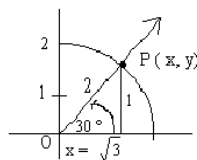
Por conveniencia, el punto P sobre el lado final del ángulo se tomó a una distancia de 2 unidades del origen. Como el sector es parte de un cuarto de circunferencia se ve claramente que el radio de esta es 2.



El triángulo que así se forma es rectángulo y por Teorema de Pitágoras podemos determinar todos los lados de él.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\x^2 + 1 &= 2^2 \\x^2 + 1 &= 4 \\x^2 &= 3 \\x &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

Completando el triángulo con los datos encontrados, tenemos

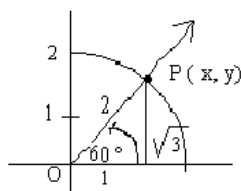


Usando las definiciones de las funciones trigonométricas determinadas anteriormente tenemos que :

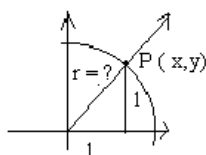
$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Para un ángulo de 60° se utiliza el mismo hecho geométrico

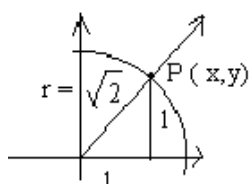


En la figura se muestra un ángulo de 45° en posición estándar. El triángulo rectángulo correspondiente es isósceles de lado 1 unidad de modo que se puede asociar el punto P (1, 1) como el punto P sobre el lado final. Encontraremos el radio r de la circunferencia a través del Teorema de Pitágoras.



$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\1^2 + 1^2 &= r^2 \\2 &= r^2 \\\sqrt{2} &= r\end{aligned}$$

Completando el triángulo



De aquí se tiene que:

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resumiendo

Completaremos la siguiente tabla con las seis funciones trigonométricas para los ángulos de 30° , 60° y 45° .

α en grados	α en rad	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicios

Sin usar calculadora, demuestre las siguientes igualdades

$$a) 4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 2$$

$$b) 2\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 3$$

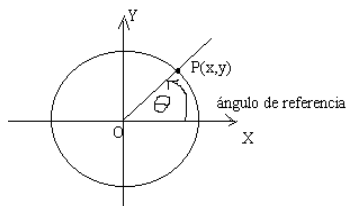
¿Pero podemos usar esta información para determinar otros ángulos ?

Sí, pero para esto es necesario conocer otro concepto, que es el de **ángulo de referencia** y el cual definiremos a continuación.

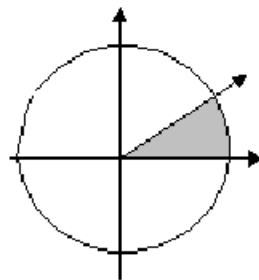
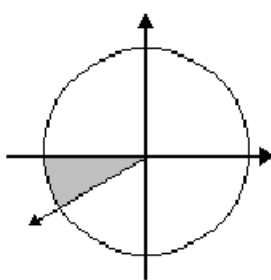
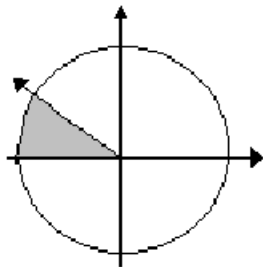
Ángulos de referencia

Para encontrar las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera, se usa un ángulo de referencia del primer cuadrante, agudo y positivo, el cual considera el lado inicial con el semieje positivo de las X y el lado terminal queda en el primer cuadrante.

Este ángulo se asocia a un triángulo de referencia que es rectángulo.



Este ángulo es de referencia para los siguientes ángulos:



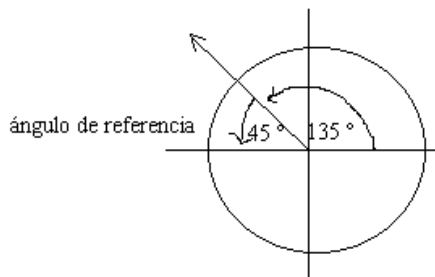
Ejemplo 1

Use un ángulo de referencia para encontrar las seis funciones trigonométricas para 135° .

Respuesta

El ángulo de 135° es un ángulo del segundo cuadrante, por lo tanto el ángulo de referencia a utilizar es el de 45° , ya que

$$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$



Por lo tanto determinaremos las seis funciones trigonométricas para el ángulo de 45° , pero recuerde, el ángulo 135° está en el segundo cuadrante, y esto incide en el signo de la función.

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tag} 45^\circ = 1 \Rightarrow \operatorname{tag} 135^\circ = -1$$

$$\operatorname{cotg} 45^\circ = 1 \Rightarrow \operatorname{cotag} 135^\circ = -1$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2} \Rightarrow \sec 135^\circ = -\sqrt{2}$$

Ejemplo 2

Use un ángulo de referencia para encontrar las seis funciones trigonométricas para

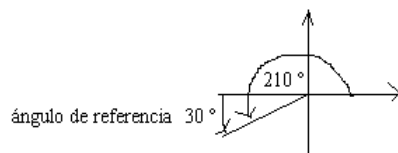
930°

Respuesta:

Se observa que el ángulo de 930° es mayor que 360° , luego se le debe restar a éste cualquier entero múltiplo de 360° , sin alterar el valor de las funciones trigonométricas.

$$930^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 210^\circ$$

El ángulo de 210° se encuentra en el III cuadrante



El ángulo de referencia es el de 30° ya que $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$ luego las seis funciones trigonométricas son para este ángulo son

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tang} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \quad \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{cotag} 30^\circ = \sqrt{3}$$

Pero como el cuadrante en el cual trabajamos es el tercero entonces **cambiamos los signos y** el ángulo original

$$\operatorname{sen} 210^{\circ} = -\frac{1}{2}, \quad \cos 210^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tang} 210^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} 210^{\circ} = -2, \quad \sec 210^{\circ} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{cotag} 210^{\circ} = \sqrt{3}$$

Ejercicios

1) En los siguientes ejercicios, encuentre el ángulo de referencia α y determine las seis funciones trigonométricas.

- a) 300°
- b) -315°
- c) 240°
- d) 120°
- e) -300°
- f) 315°

2) Hallar el valor exacto de estas expresiones, usando ángulos de referencia

$$a) \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$$

$$b) \cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tag} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tag} \frac{7\pi}{6}$$

$$c) \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$$

Respuesta

a) Ángulo de referencia : 60°

$$\operatorname{sen} 300^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 300^{\circ} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tang} 300^{\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 300^{\circ} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \sec 300^{\circ} = 2, \quad \operatorname{cotag} 300^{\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) Ángulo de referencia 45°

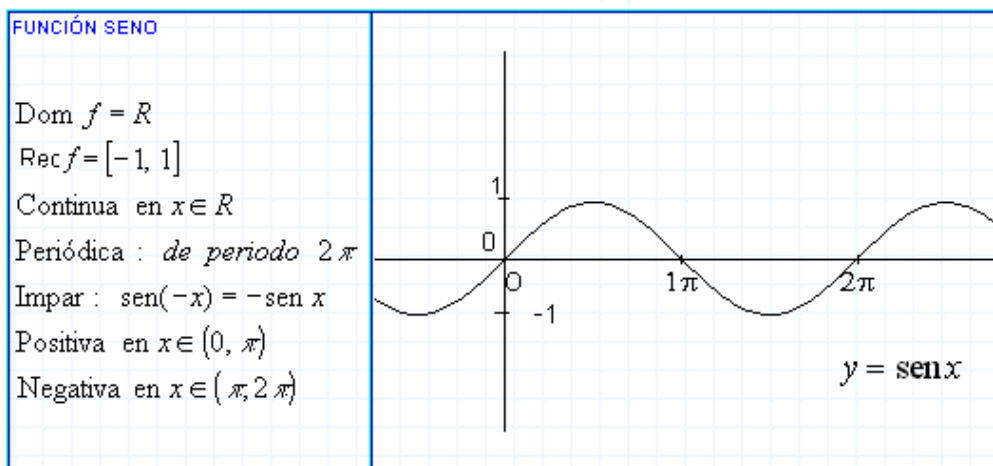
$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tang} 45^{\circ} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 45^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \sec 45^{\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{cotag} 45^{\circ} = 1$$

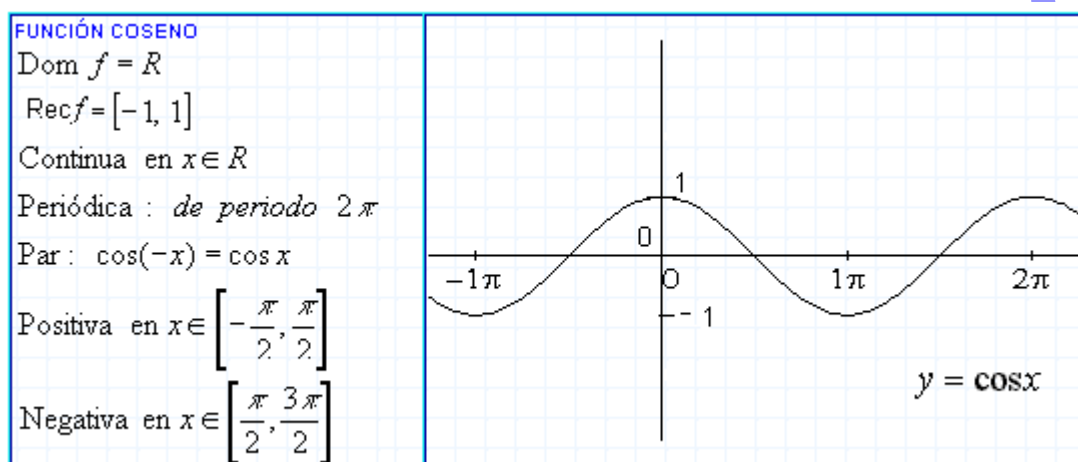
$$2) \quad a) -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \frac{3+4\sqrt{3}}{6} \quad c) -2$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

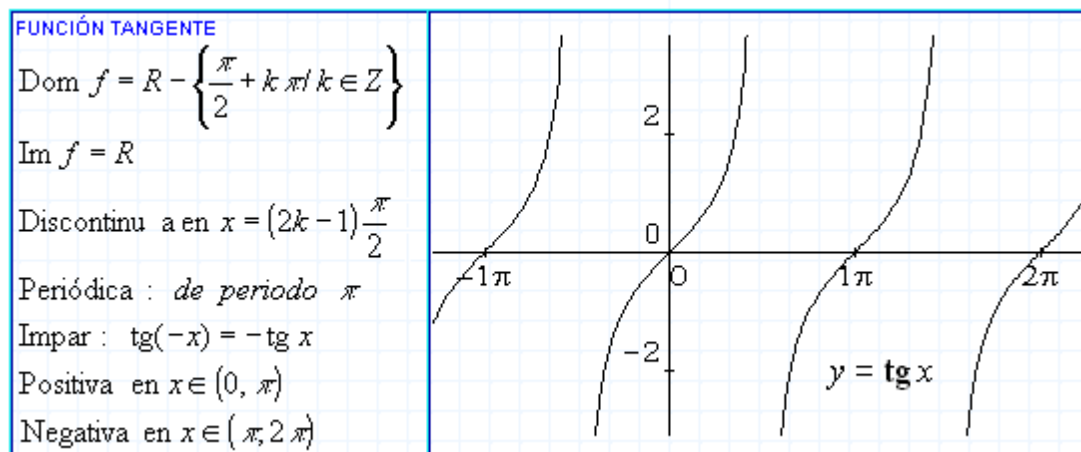
FUNCION SENO



FUNCION COSENO

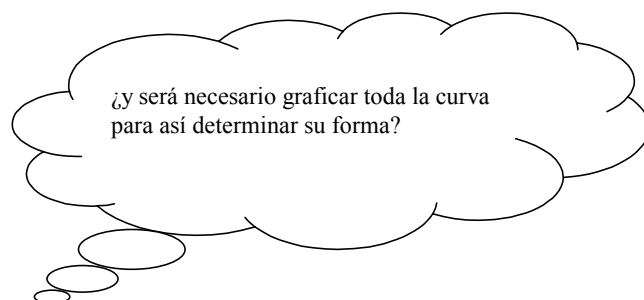


FUNCION TANGENTE



Recuerde que para hacer la gráfica de una función cualquiera, se construye primero una tabla de valores de los pares ordenados asociados (x, y) , después se marcan los puntos correspondientes y por último se unen los puntos con una curva suave.

¿Qué pasa con las funciones trigonométricas?

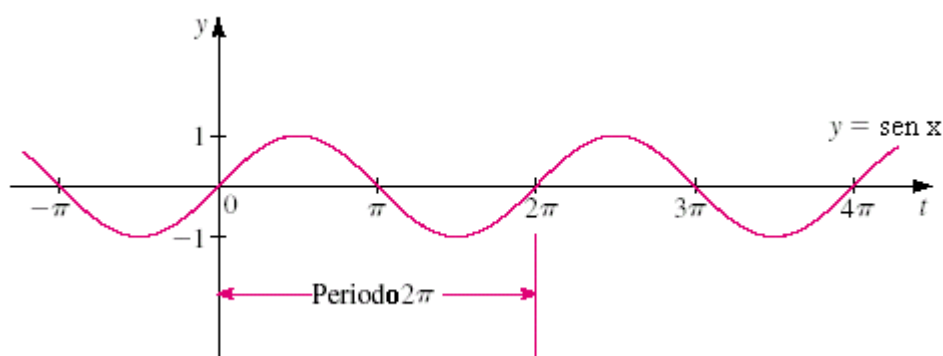


No, ya que estas curvas son continuas uniforme, es decir, periódicas y cada periodo recibe el nombre de un **ciclo** y basta con saber las características de este ciclo.

FUNCION SENO

¿Cuál es un ciclo de la función seno ?

Si usted mira cuidadosamente, puede observar que un ciclo corresponde a un tramo entre los puntos $(0, 0)$ y $(2\pi, 0)$ y el punto medio de él es el punto $(\pi, 0)$.



Ahora, resumiremos las propiedades de la función seno a través de un ciclo de la función.

- 1) La función seno es periódica, con periodo 2π
- 2) Para cualquier valor dado a x , la solución se encuentra entre $[-1, 1]$.
- 3) El seno de x es igual a cero cuando $x = 0$ o $x = \pi$
- 4) El seno es una función impar, por lo tanto, su gráfica es simétrica con respecto al origen.
 $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$
- 5) la función seno decrece entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$
- 6) La función crece entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ y 2π

Toda función real de la forma

$$f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c) + d \quad \text{con } a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}$$

se llama función SINUSOIDAL O SINUSOIDE

¿Cambia el gráfico según sea el valor de "a", "b", "c" o "d" ?
Si, y veremos cada uno de los casos

1° CASO

Si $c = d = 0$, entonces, la función toma la forma $f(x) = a \operatorname{sen} bx$

Como $y = \operatorname{sen} x$ es periódica, de periodo 2π y su gráfico tiene la mayor ordenada que es 1, cuando

$$x = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \text{ entonces, la función } f(x) = a \operatorname{sen} bx, \text{ suponiendo que } a > 0 \text{ y } b > 0$$

es también periódica repitiéndose cada vez que bx varía en una longitud 2π , es decir, cuando x varía en una longitud $\frac{2\pi}{b}$. Su período es entonces $\frac{2\pi}{b}$

"a" es la mayor ordenada o máximo de la función y se llama amplitud de la función

Si $a > 0$, el ciclo comienza sobre el eje X

Si $a < 0$, el ciclo comienza abajo del eje X

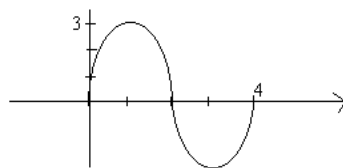
Ejemplo 1

Sea la función $y = 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$. Graficar

Respuesta

Amplitud : $a = 3$, $a > 0$

Periodo : $\frac{2\pi}{b}$, en este ejercicio $b = \frac{\pi}{2}$ luego el periodo es 4



- Conviene graficar en el eje positivo de las x
- Los extremos son $(0,0)$ y $(4,0)$ de un período
- El punto medio es $(2,0)$ de un período
- El valor máximo lo toma en el punto medio entre $(0,0)$ y $(2,0)$, es decir $(1,3)$
- La gráfica pasa por el punto $(1,3)$

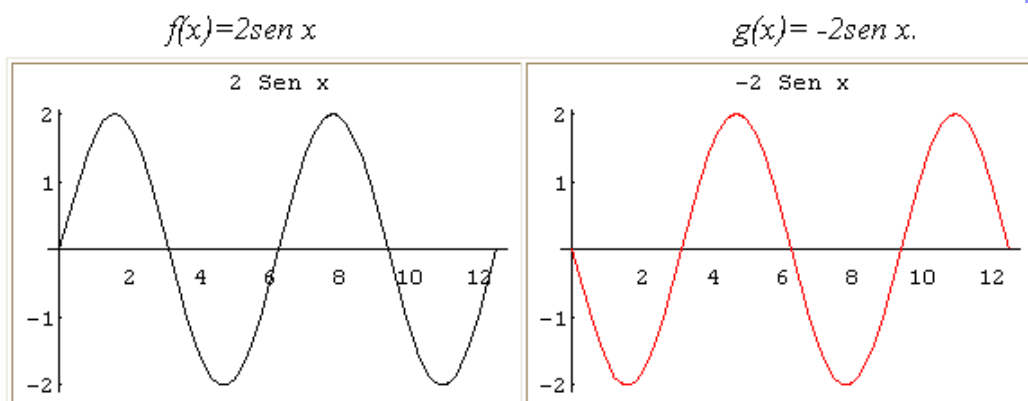
¡¡ OJO !!

Como la función seno es impar, se tiene que:

$$y = a \operatorname{sen}(-bx) = -a \operatorname{sen}(bx), \text{ entonces el gráfico de}$$

$$y = -3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \text{ es el simétrico del de } 3 \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{2} x\right)$$

Observe los gráficos siguientes



¿Qué puede decir de ellos?. ¿En qué se diferencian $f(x)$ y $g(x)$?

2° CASO

Si $d = 0$, entonces, la función toma la forma $f(x) = a \operatorname{sen}(bx + c)$

El gráfico de esta función es similar al de $f(x) = a \operatorname{sen} bx$

$f(x) = 0$ cuando

$$bx + c = 0, \quad \text{despejamos } x$$

$$x = -\frac{c}{b}$$

Este valor recibe el nombre de FASE y representa el número de unidades que se debe trasladar el gráfico de $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$ a lo largo del eje x , para obtener el gráfico de la función. Esta traslación también se llama desplazamiento horizontal.

Si $\frac{c}{b} < 0$, la traslación es hacia la izquierda

si $\frac{c}{b} > 0$, la traslación es hacia la derecha

Ejemplo 2

Graficar $y = 2 \operatorname{sen}(2x - \pi)$

Respuesta

Amplitud $a = 2$

Periodo: $\frac{2\pi}{b}$, en este ejercicio $b = 2$ luego el periodo es π

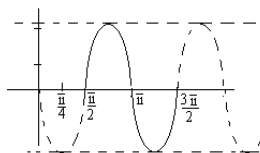
Fase:

$$2x - \pi = 0$$

$$2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

como este valor es positivo, la traslación es hacia la derecha



En el gráfico, la línea continua muestra el período que se repite a lo largo de todo el eje.

Ejemplo

Grafique $\text{sen}(x - \pi)$

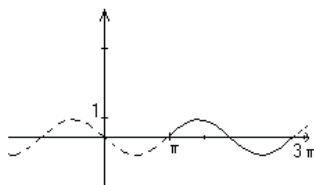
Respuesta

Amplitud : $a = 1$

Periodo : $\frac{2\pi}{b}$, en este ejercicio $b = 1$ luego el periodo es 2π

Fase $x - \pi = 0$
 $x = \pi$

Gráfico



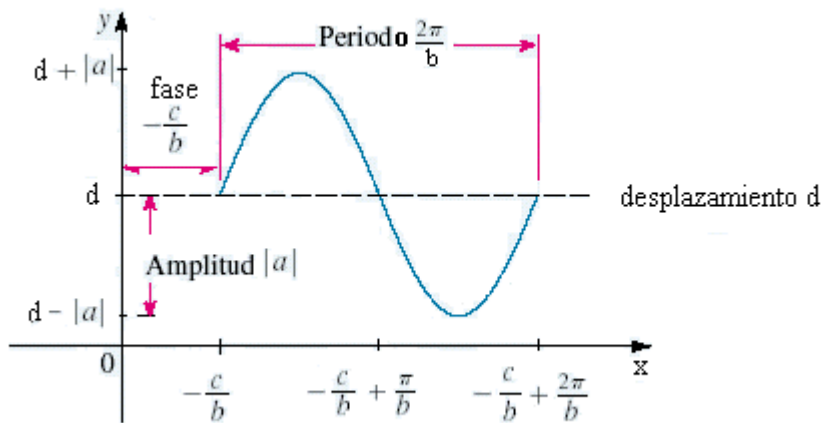
3 ° CASO

Si la función toma la forma $f(x) = a \text{sen}(bx + c) + d$ con a, b, c y $d \in \mathbb{R}$

El valor de "d" traslada el gráfico en forma vertical

Si $d > 0$, el gráfico se desplaza hacia arriba d unidades

Si $d < 0$, el gráfico se desplaza hacia abajo d unidades



Ejemplo

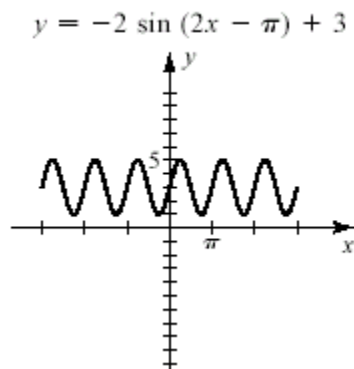
Graficar $y = -2 \operatorname{sen}(2x - \pi) + 3$

Respuesta

Amplitud : $a = 2$

Periodo : $\frac{2\pi}{b}$, en este ejercicio $b = 2$ luego el periodo es π

Como $a < 0$, el gráfico igual al anterior , pero es simétrico a él.



Ejemplo

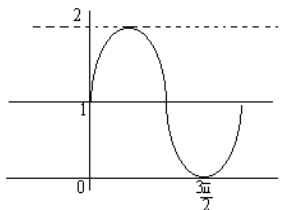
Grafique $y = 1 + \operatorname{sen} x$

Respuesta

Amplitud : $a = 1$

Periodo : $\frac{2\pi}{b}$, en este ejercicio $b = 1$ luego el periodo es 2π

Esta función es similar a la de $y = \operatorname{sen} x$, pero se traslada 1 unidad hacia arriba



VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios

Grafique las siguientes funciones

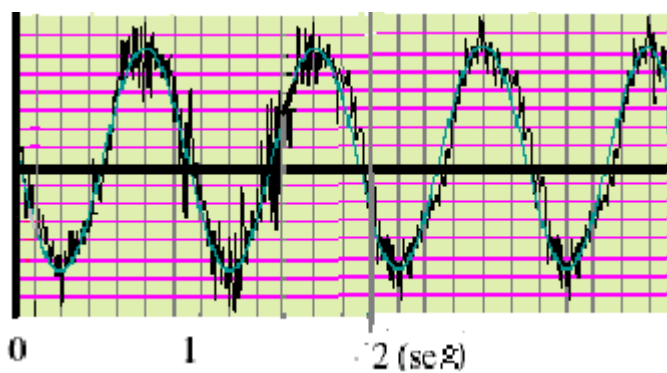
a) $y = -2 \operatorname{sen} 3x$

b) $y = 3 \operatorname{sen} \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

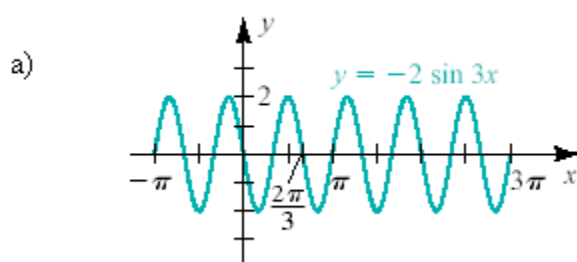
c) $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

d) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

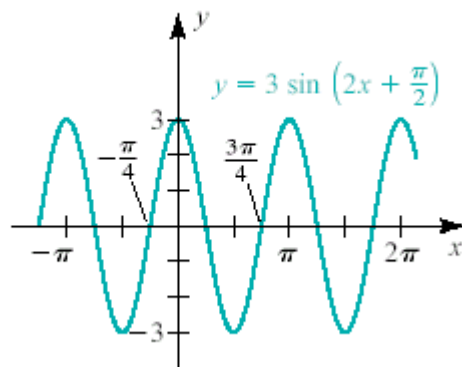
e) En la figura se muestra el encefalograma de un cerebro humano durante un sueño profundo. Las ondas W que se registran corresponde a la función $W = a \operatorname{sen} (bx + c)$.
¿Cuál es el valor de b



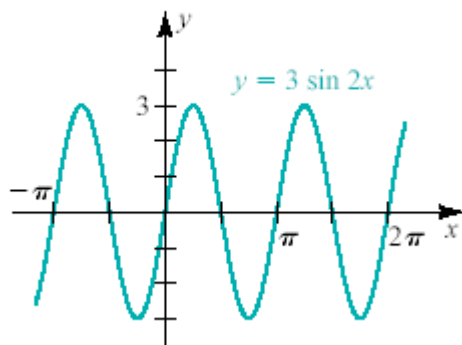
Respuesta



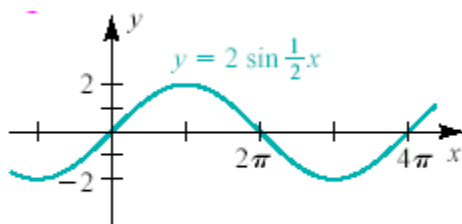
b)



c)



d)



e) $b = 2\pi$

Otras formas de ecuaciones son...

Función sinusoidal de la forma $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$

Para resolver las gráficas es conveniente estudiar el siguiente teorema

Teorema :

Para valores cualquiera de a , b y c existen números A y α tales que

$$m \operatorname{sen} cx + n \cos cx = A \operatorname{sen}(cx + \alpha)$$

en donde $A = \sqrt{m^2 + n^2}$, de aquí podemos resolver aún más la expresión, como sigue

VIRGINIO GOMEZ

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad / : A^2$$

$$1 = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{A^2}$$

$1 = \left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{b}{A}\right)^2$, por lo tanto el punto de coordenadas $P\left(\frac{a}{A}, \frac{b}{A}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria, luego:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{A}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{A}$$

La gráfica entonces corresponde a la función $y = A \operatorname{sen}(cx + \alpha)$

Ejemplo

Graficar $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$

Respuesta

$$a = 2$$

$$b = 5$$

$$c = 1$$

$$\text{luego } A = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

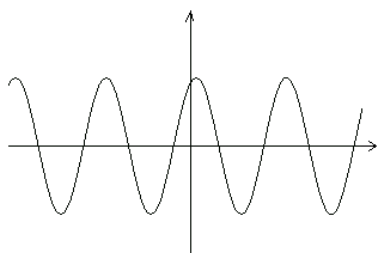
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}, \quad \alpha = 68^\circ$$

en radianes los 68° se transforman a -1.19

La fase es -1.19

Periodo 2π

La gráfica es:



Ejemplo de aplicación

Dos generadores de corriente alterna producen corrientes que vienen dadas, en función del tiempo por las ecuaciones

$$i_1 = \sqrt{3} \operatorname{sen} 120 \pi x$$

$$i_2 = -\cos 120 \pi x$$

Si la corriente del segundo se añade a la del primero, determine las corrientes máximas, cuándo ocurre y la fase producida.

Respuesta

El total de corriente está dado por la ecuación

$$i = i_1 + i_2 = \sqrt{3} \operatorname{sen} 120 \pi x - \cos 120 \pi x$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$b = 1$$

$$c = 120 \pi$$

$$A = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

El punto P tiene coordenadas $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Así

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \quad y \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

por cualquiera de las dos formas trigonométricas es posible determinar el valor del ángulo. Como α está en el IV cuadrante $\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

Por lo tanto el total de corriente puede representarse por la ecuación.

$$A \operatorname{sen}(cx + \alpha)$$

$$2 \operatorname{sen}\left(120 \pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Se deduce que la corriente máxima es 2 y que la fase es:....

$$120 \pi x - \frac{\pi}{6} = 0$$

$$120 \pi x = \frac{\pi}{6}$$

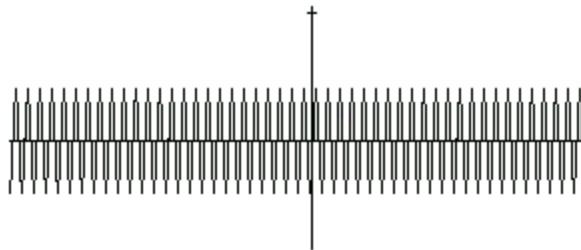
$$x = \frac{\pi}{120 \cdot \pi \cdot 6}$$

$$x = \frac{1}{720}$$

$\frac{1}{720}$ unidades de tiempo.

El valor máximo de i ocurre cuando $x = \frac{1}{180} + \frac{k}{360}$, $k \in \mathbb{Z}$

Gráfico:



Ejercicios

Construya la gráfica de:

- 1) $y = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$
- 2) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$
- 3) $y = -\operatorname{sen} x + 2 \cos x$

Respuesta

1)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$A = \sqrt{5} \approx 2, 23$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{A} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 63^\circ$$

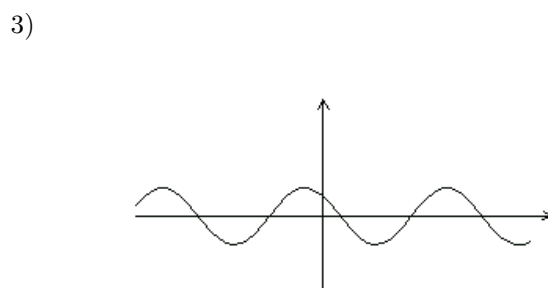
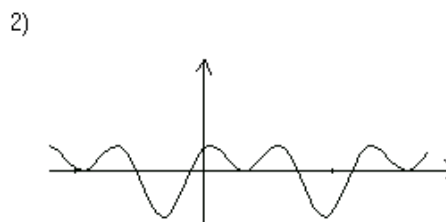
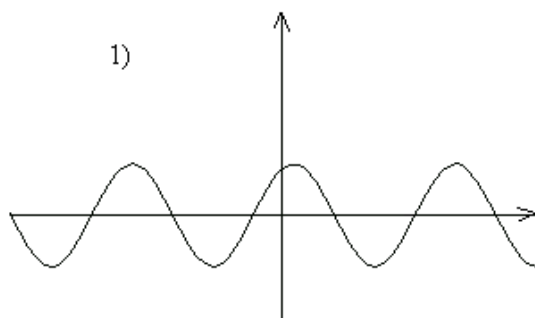
luego la función queda $A \operatorname{sen}(cx + \alpha)$
 $\sqrt{5} \operatorname{sen}(x + 63^\circ)$

$$\text{Amplitud} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Fase: } x + 63^\circ &= 0 \\ x &= -63^\circ \end{aligned}$$

Desplazamiento a la izquierda

VIRGINIO GOMEZ



RELACIONES BASICAS E IDENTIDADES

Anteriormente habíamos visto algunas relaciones llamadas Recíprocas, ahora vamos a ver otras más y que nos servirán para el posterior desarrollo del curso.

Relaciones Recíprocas

$$\begin{aligned} \text{cosec } x &= \frac{1}{\text{sen } x} \\ \text{sec } x &= \frac{1}{\text{cos } x} \\ \text{cotag } x &= \frac{1}{\text{tag } x} \end{aligned}$$

VIRGINIO GÓMEZ

Relaciones de cuocientes

$$\begin{aligned}\text{tag } x &= \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \\ \text{Cotag } x &= \frac{\text{cos } x}{\text{Sen } x}\end{aligned}$$

Relaciones Pitagóricas

$$\begin{aligned}\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x &= 1 \\ 1 + \text{tag}^2 x &= \text{sec}^2 x \\ 1 + \text{cotag}^2 x &= \text{cosec}^2 x\end{aligned}$$

Ejercicios

Determine el valor de la siguiente expresión usando relaciones pitagóricas

- 1) Si $x = \cos A$ y $\text{sen } A = \frac{y}{5}$, determine el valor numérico de $25x^2 + y^2$
- 2) Si $\text{sen } 12^\circ = 0,2$ y $\text{sen } 37^\circ = 0,6$, hallar (usando las fórmulas anteriores y sin usar calculadora)
a) $\cos 12^\circ$ b) $\text{tg } 12^\circ$ c) $\cos 37^\circ$ c) $\text{tg } 37^\circ$.

Respuesta

- 1) 25

Con frecuencia es conveniente transformar o reducir una expresión dada que utilice funciones trigonométricas en otra función más sencilla.



Se llaman *IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS* a igualdades en las que aparecen expresiones trigonométricas y para las que ocurre que sea cual sea el valor de los ángulos siempre se verifican.

Una identidad trigonométrica se verifica transformando alguno de los lados de la igualdad, usando algunas de las identidades vistas anteriormente.

Si la igualdad se verifica, entonces decimos que la expresión es una identidad, lo cual se simboliza por " \equiv ".

Ejemplo

Verifique la identidad

$$\tan x \cdot \cos x = \sin x$$

Desarrollaremos el lado izquierdo para llegar al derecho

$$\tan x \cdot \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x \equiv \sin x$$

Por lo tanto $\tan x \cdot \cos x \equiv \sin x$



Ejercicios

Demuestre que las siguientes igualdades son identidades

- 1) $\frac{\sec x}{\cotang x + \tan x} \equiv \sin x$
- 2) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \equiv \frac{1 - \cos x}{\sin x}$
- 3) $\cos^2 y - \sin^2 y \equiv 2 \cos^2 y - 1$
- 4) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} \equiv \frac{\cos x}{1 + \sin x}$
- 5) $\sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha \equiv \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha$
- 6) $\operatorname{cosec}^2 A - \cos^2 A \equiv 1 + \cos^2 A \cot^2 A$
- 7) $\frac{1}{1 + \sin B} + \frac{1}{1 - \sin B} \equiv 2 \sec^2 B$
- 8) $\frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \equiv \frac{\sec x}{1 + \cos x}$
- 9) $\frac{\cos A \cdot \cotg A - \sin A \cdot \tan A}{\operatorname{cosec} A - \sec A} \equiv 1 + \sin A \cdot \cos A$

- 10) $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x + 1}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1} \equiv \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x}$
- 11) $\operatorname{sen} x \cdot \sec x \equiv \operatorname{tang} x$
- 12) $(1 - \cos x)(1 + \sec x) \cdot \cotang x \equiv \operatorname{sen} x$
- 13) $\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cosec} t} + \frac{\cos t}{\sec t} \equiv 1$
- 14) $\operatorname{tang}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x \cdot \cos^2 x \equiv 1$
- 15) $\frac{1 - \sec^2 t}{1 - \operatorname{cosec}^2 t} \equiv \operatorname{tag}^4 t$
- 16) $(\operatorname{tag} A + \cotg A)^2 \equiv \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE DOS ANGULOS

1) FORMULAS PARA LA SUMA

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}$$

2) FORMULAS PARA LA DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tang}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}$$

3) FORMULAS PARA EL DOBLE DE UN ANGULO

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tang}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}$$

4) FORMULAS PARA EL ANGULO MEDIO

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



o o

Usaremos estas igualdades para
resolver los siguientes ejercicios

Ejemplo

Compruebe que $\sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$, utilice la información dada

Respuesta

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha) &= \\ &= (\sin 45^\circ \cos \alpha + \sin \alpha \cos 45^\circ) - (\sin 45^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 45^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \\ &= 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

Ejercicios

- 1) Si $\sin 12^\circ = 0,2$ y $\sin 37^\circ = 0,6$, halla
Calcule, a partir de ellas,
a) $\sin 49^\circ$ b) $\sin 25^\circ$ c) $\cos 49^\circ$ d) $\cos 25^\circ$

utilizando las fórmulas dadas anteriormente

- 2) Compruebe que
- a) $\tan \alpha \sin 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
- b) $\cotang \alpha \sin 2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$
- c) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cotang \alpha$
- d) $\cos \alpha = \sin(\alpha + 30^\circ) + \cos(\alpha + 60^\circ)$
- 3) Verifique que
- a) $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$

VIRGINIO GOMEZ

- b) $1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
- c) $1 + \operatorname{tag} x \operatorname{tag} 2x = \operatorname{seca} 2x$
- d) $\frac{\operatorname{sen}(A+B)}{\cos A \cos B} = \operatorname{tag} A + \operatorname{tag} B$
- e) $\frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)} = \frac{1}{\operatorname{tag} a}$
- f) $\frac{2\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 2a}{2\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 2a} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}$
- g) $\frac{2\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 2a}{2\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 2a} = \operatorname{tag}^2 \frac{a}{2}$

FORMULA PARA LA SUMA Y DIFERENCIA DE ANGULOS

1) PRODUCTO DE SENO Y COSENO

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

2) SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)$$

Apliquemos estas igualdades en los siguientes ejercicios

VIRGINIO GOMEZ

Ejemplo 1

Expresa $\sin 40^\circ \cos 30^\circ$ como suma o diferencia de ángulos

Solución

$$\begin{aligned}\sin 40^\circ \cos 30^\circ &= \frac{1}{2}[\sin(40^\circ + 30^\circ) + \sin(40^\circ - 30^\circ)] \\ &= \frac{1}{2}[\sin 70^\circ + \sin 10^\circ]\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Expresa $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ como producto

Solución

$$\sin 50^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin \frac{1}{2}(50^\circ + 40^\circ) \cos \frac{1}{2}(50^\circ - 40^\circ) = 2 \sin 45^\circ \cos 5^\circ$$

Ejemplo 3

Si el seno de cierto ángulo vale $-\frac{5}{7}$ y se sabe que el ángulo pertenece al 3º cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo doble (para el $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ y del ángulo mitad de este ángulo).

Solución

Para aplicar las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad necesitamos conocer el coseno y la tangente del ángulo.

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

(En esta fórmula consideramos el signo negativo de la raíz puesto que los ángulos del tercer cuadrante tienen coseno negativo)

$$\text{Tenemos así que el coseno vale } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{7} \text{ y } \tan \alpha = \frac{5\sqrt{24}}{24}$$

Aplicando las fórmulas dadas por la teoría:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot -\frac{5}{7} \cdot -\frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{10\sqrt{24}}{49}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{24}{49} - \frac{25}{49} = -\frac{1}{49}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \frac{5\sqrt{24}}{24}}{1 - \left(\frac{5\sqrt{24}}{24}\right)^2} = -10\sqrt{24}$$

para el ángulo mitad tomamos en las fórmulas los signos convenientes (pertenece al segundo cuadrante)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = + \sqrt{\frac{1 - \frac{-\sqrt{24}}{7}}{2}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{24}}{14}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1 + \frac{-\sqrt{24}}{7}}{2}} = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{24}}{14}}$$

$$\operatorname{tag}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = - \sqrt{\frac{1 - \frac{-\sqrt{24}}{7}}{1 + \frac{-\sqrt{24}}{7}}} = - \sqrt{\frac{7 + \sqrt{24}}{7 - \sqrt{24}}}$$

Ejercicios

1) Exprese como suma o diferencia de ángulos

a) $\cos 110^\circ \operatorname{sen} 55^\circ$

b) $\cos 50^\circ \cos 35^\circ$

c) $\operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} 40^\circ$

2) Exprese como producto

a) $\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ$

b) $\cos 55^\circ + \cos 25^\circ$

c) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$

3) Si el seno de cierto ángulo vale $-2/10$ y se sabe que el ángulo pertenece al 2º cuadrante, calcular las razones trigonométricas del ángulo doble (para el $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tag} 2\alpha$ y del ángulo mitad de este ángulo).

4) Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x} = \frac{2}{1 - \operatorname{tag}^2 x} \quad (\text{ref: use la fórmula de suma de senos})$$

Respuesta

1)

a) $\frac{1}{2}[\operatorname{sen} 165^\circ - \operatorname{sen} 55^\circ]$

b) $\frac{1}{2}[\cos 85^\circ + \cos 15^\circ]$

c) $-\frac{1}{2}[\cos 95^\circ - \cos 15^\circ]$

2)

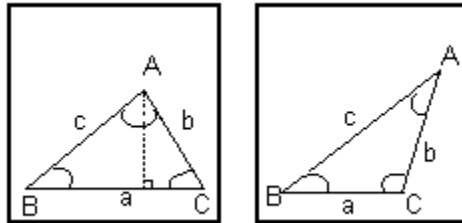
a) $2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 25^\circ$

b) $2 \cos 40^\circ \cos 15^\circ$

$$c) - 2 \operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} (-20^\circ)$$

TRIANGULOS NO RECTANGULOS

Un triángulo no rectángulo o triángulo oblicuo, es aquel que no contiene un ángulo recto. En este tipo de triángulos, los tres ángulos son agudos, o bien dos de sus ángulos son agudos y uno obtuso.



Se ha convenido en llamar A, B y C a los ángulos y a, b y c a los lados del triángulo.

Anteriormente vimos como se resuelven problemas usando como referencia triángulos rectángulos, ahora resolveremos problemas usando cualquier tipo de triángulo.

Resolver un triángulo, consiste en calcular todos sus elementos: sus tres lados y sus tres ángulos, para ésto es necesario conocer al menos tres de sus elementos, uno de los cuales necesariamente es un lado.

LEY DE LOS SENOS

En cualquier triángulo ABC, la relación entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante; esto es:

$$\frac{\operatorname{Sen} A}{A} = \frac{\operatorname{Sen} B}{B} = \frac{\operatorname{Sen} C}{C} \quad \text{o} \quad \frac{A}{\operatorname{Sen} A} = \frac{B}{\operatorname{Sen} B} = \frac{C}{\operatorname{Sen} C}$$

Este teorema se aplica cuando en un triángulo dado se conocen:

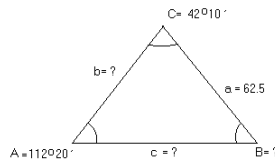
Caso I : Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos
Caso II : Dos ángulos y el lado entre ellos
Caso III: Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos



Veamos una aplicación de este teorema en cada uno de los casos dados

Ejemplo Caso I

En el triángulo ABC, $a = 62.5$, $\angle A = 112^\circ 20'$ y $\angle C = 42^\circ 10'$. Determine $\angle B$ y los lados b y c



Respuesta

Para encontrar $\angle B$, se determina a través de la relación : la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180° .

$$\angle B = 180^\circ - (\angle C + \angle A) = 180^\circ - 154^\circ 30' = 25^\circ 30'$$

Para determinar los lados b y c lo hacemos a través del Teorema del Seno

Para determinar b

$$\frac{a}{\sen A} = \frac{b}{\sen B}, \text{ reemplazando se tiene}$$

$$\frac{62.5}{\sen 112^\circ 20'} = \frac{b}{\sen 25^\circ 30'} \quad b = \frac{62.5 \cdot \sen 25^\circ 30'}{\sen 112^\circ 20'} = 29.1$$

VIRGINIO GOMEZ

Para determinar c

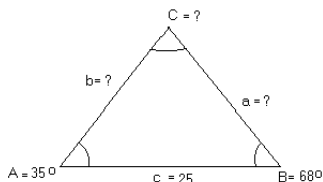
$$\frac{62.5}{\sen 112^{\circ}20'} = \frac{c}{\sen 42^{\circ}10'}$$

$$c = \frac{62.5 \cdot \sen 42^{\circ}10'}{\sen 112^{\circ}20'} = 45.4$$

Por lo tanto $\sphericalangle B = 25^{\circ}30'$, $b = 29.1$, $c = 45.4$

Ejemplo Caso II

Dado el triángulo ABC, $c = 25$, $\sphericalangle A = 35^{\circ}$ y $\sphericalangle B = 68^{\circ}$. Determine $\sphericalangle C$ y los lados a y b



$$\angle C = 180^{\circ} - (\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 77^{\circ}$$

Para a $a = \frac{c \sen A}{\sen C} = \frac{25 \sen 35^{\circ}}{\sen 77^{\circ}} = 15$

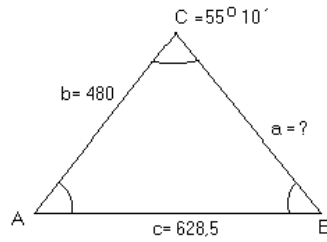
Para b $b = \frac{c \sen B}{\sen C} = \frac{25 \sen 68^{\circ}}{\sen 77^{\circ}} = 24$

Ejemplo caso III

Dado en el triángulo ABC, $c = 628.5$, $b = 480$, $\sphericalangle C = 55^{\circ}10'$. Determine $\sphericalangle A$ y $\sphericalangle B$ y el lado a

VIRGINIO GOMEZ

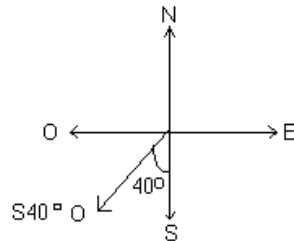
Respuesta



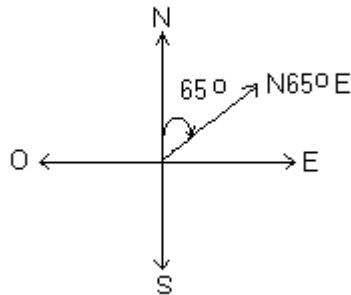
-Orientación

En navegación, la dirección marca el ángulo agudo que forma una recta con la recta norte-sur.

En la figura se ilustra una orientación $S40^\circ O$

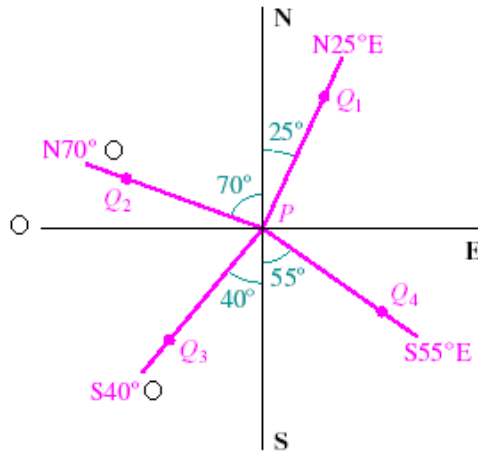


Una orientación $N65^\circ E$



En la figura se muestran las coordenadas de $Q_1 : N25^\circ E$, $Q_2 : N70^\circ O$, $Q_3 : S40^\circ O$ y $Q_4 : S55^\circ E$

VIRGINIO GOMEZ



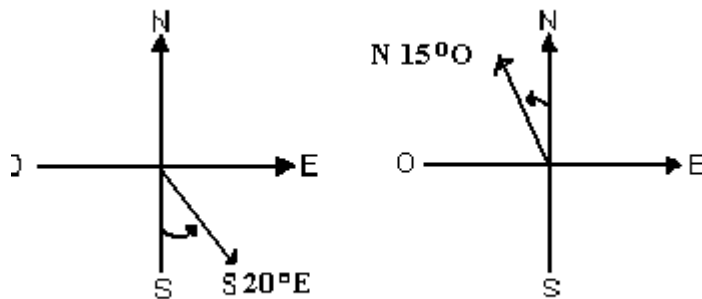
Ejercicios

Represente en la figura

a) $S20^{\circ}E$

b) $N15^{\circ}O$

Respuesta



$$\angle B: \quad \text{sen } B = \frac{b \text{ sen } C}{c} = \frac{480 \text{ sen } 55^{\circ}10'}{628} = 38^{\circ}50'$$

$$\angle A = 180^{\circ} - (B + C) = 86^{\circ}$$

$$\text{Para } a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B} = \frac{480 \text{ sen } 86^{\circ}}{\text{sen } 38^{\circ}50'} = 764$$

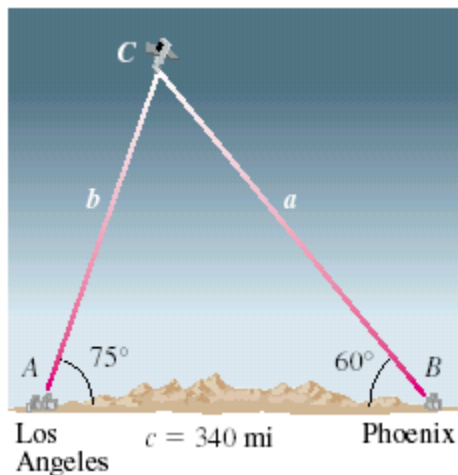
Ejercicios

1. – Resuelva el triángulo ABC dado que $a = 31.5$, $b = 51.8$ y

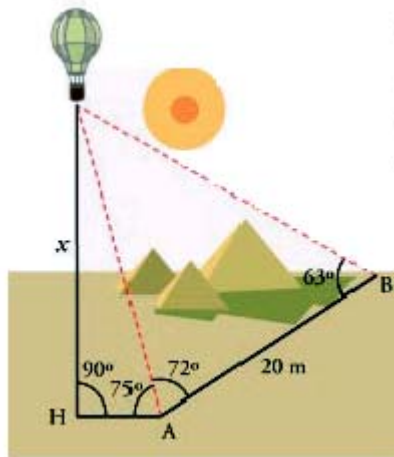
$$\angle A = 33^{\circ}40'. \text{ Determine } c, \angle B \text{ y } \angle C$$

VIRGINIO GOMEZ

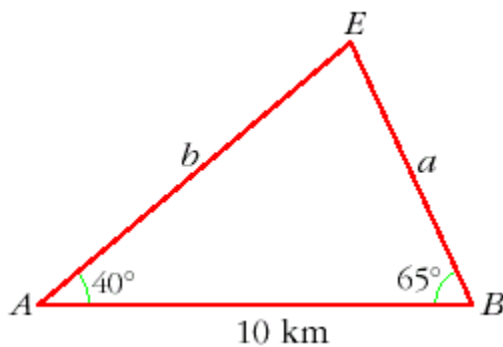
2. — Resuelva el triángulo ABC dado que $a = 525$, $c = 421$ y $\angle A = 130^\circ 40'$
Determine : b , $\angle B$ y $\angle C$.
3. — Sean A y B dos puntos localizados en las márgenes opuestas de un río. Desde A se traza una línea $AC = 275\text{ m}$ y se miden los ángulos $\angle CAB = 125^\circ 40'$, $\angle ACB = 48^\circ 50'$. Encuentre la longitud AB.
4. — Un edificio está situado arriba de una colina con una pendiente de 15° de inclinación. El Sol está sobre el edificio con un ángulo de elevación de 42° . Encuentre la altura del edificio si éste proyecta una sombra de 36 pies de largo
5. — Una torre forma un ángulo de $113^\circ 12'$ con el plano inclinado sobre el cuál está y desde una distancia de 89 m de su base medida hacia abajo del plano se ve la torre bajo un ángulo de $23^\circ 27'$. Calcular la altura de la torre.
6. — Dos boyas están apartada por una distancia de 64,2 m y un bote está a 74,1 m de la más cercana. El ángulo que forman las dos visuales del bote a las boyas es de $27^\circ 18'$. ¿Qué distancia hay del bote a la boya más alejada?
7. — Un barco navega hacia el Este, cuando observa una luz con una orientación $N62^\circ E$. Después de que el barco navega 250 mt, la luz se encuentra a $N48^\circ E$. Si el curso se mantiene igual ¿Cuál será la menor distancia entre el barco y la luz?
8. — Un satélite que orbita alrededor de la tierra pasa sobre dos estaciones de observación, Phoenix y Los Angeles que están a 340 millas una de otra. En cierto instante los ángulos de elevación son 60° y 75° respectivamente. ¿A qué distancia se encuentra el satélite de la estación de Los Angeles?



- 9) Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\angle BAC = 46^\circ$ y $\angle BCA = 53^\circ$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?
- 10) Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?

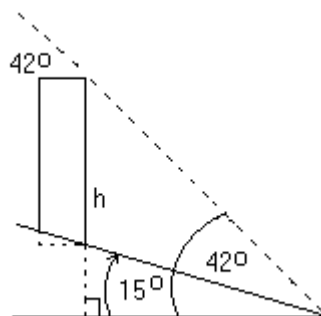


- 11) Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?



Respuesta

1. — $c = 56$, $\angle B = 65^\circ 43'$ y $\angle C = 80^\circ 37'$
2. — $b = 142.37$, $\angle B = 11,87^\circ$ y $\angle C = 37,46^\circ$
3. — $AB = 2159,9$
4. — La figura pedida es



VIRGINIO GÓMEZ

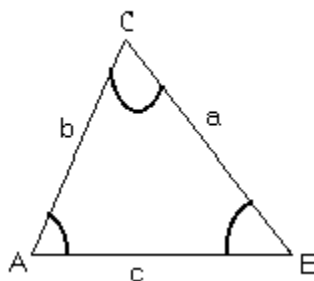
Usando el Teorema del Seno, $h = 21.99 \text{ pies}$

5. – $h = 51,6 \text{ m}$
6. – $d = 120,3 \text{ m}$
7. – 343 m
8. – 416 millas
9. – $36,4 \text{ km}$ y $40,4 \text{ km}$
- 10.- $25,2 \text{ m}$ $26,9 \text{ m}$ $24,3 \text{ m}$
11. – $6,65 \text{ km}$ dista de B $9,38 \text{ km}$ dista de A

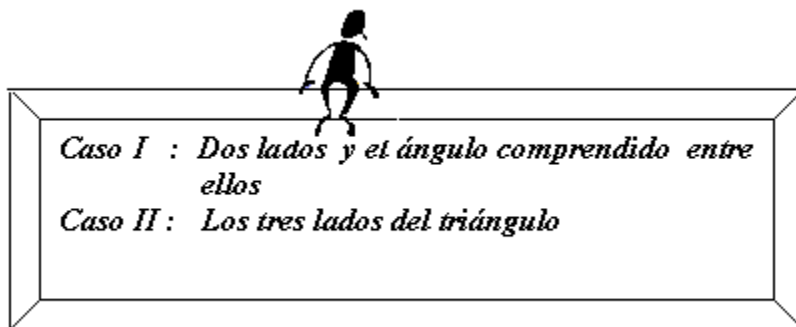
LEY DE LOS COSENOS

En cualquier triángulo ABC, el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos; esto es

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



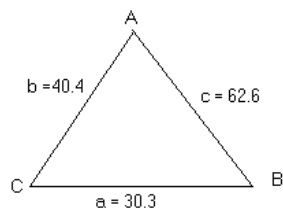
Este teorema se aplica cuando en un triángulo dado se conocen:



El caso I lo resolverá usted cuando se de un ejercicio tipo, resolvamos un ejemplo del caso II

Ejemplo Caso II

Dado en el triángulo ABC, $a = 30.3$, $b = 40.4$ y $c = 62.6$



Respuesta

Podemos determinar cualquiera de los tres ángulos con los datos dados

Determinemos $\angle A$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Despejamos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{1632,16 + 3918,76 - 918,09}{2 \cdot 40,4 \cdot 62,6} = 0,916$$

$$\angle A = 23,65^\circ$$

Para $\angle B$:

$$\cos B = 0,8447 \Rightarrow \angle B = 32,3^\circ$$

$$\text{Para determinar } \angle C : 180^\circ - (23,65^\circ + 32,3^\circ) = 124,05^\circ$$

Por lo tanto:

$$\angle A = 23,65^\circ, \quad \angle B = 32,3^\circ, \quad \angle C = 124,05^\circ$$

Ejercicios

Determine los ángulos de un triángulo, si los lados son 7, 6 y 9 respectivamente

Respuesta

$$\angle A = 50,98^\circ, \quad \angle B = 41,75^\circ, \quad \angle C = 87,27^\circ$$

VIRGINIO GOMEZ

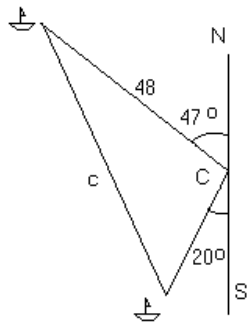
Ejemplo

Dos barcos parten de un puerto a las 7:00 a.m, uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene una orientación de $N47^\circ O$ y el otro barco mantiene una orientación de $S20^\circ O$, ¿Cuál es su separación (a la milla náutica más cercana) a las 11:00 a.m de ese mismo día?

Respuesta

Como el tiempo transcurrido es de 4 horas, tenemos que:
la **distancia** que recorre el barco más rápido es de $4 \cdot 12 = 48$ millas náuticas del puerto y la **distancia** que recorre el barco más lento $4 \cdot 10 = 40$ millas náuticas.

Usando estas distancias y las orientaciones dadas, podemos dibujar el triángulo que se muestra en la figura .



Sea c la distancia que separa los barcos a las 11:00 a.m.

por Teorema del coseno, tenemos:

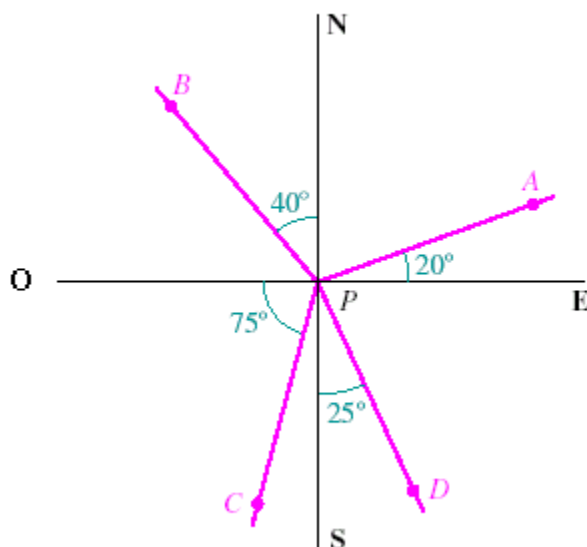
$$c^2 = 48^2 + 40^2 - 2 \cdot (48) \cdot (40) \cdot \cos C$$

$$\angle C = 180^\circ - 47^\circ - 20^\circ = 113^\circ$$

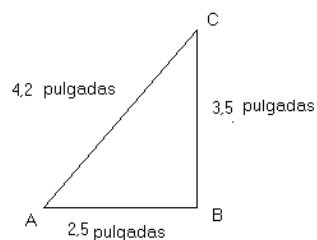
$$c = 73,51$$

Ejercicios

1. — Identifique las coordenadas de los puntos que se muestran en la figura



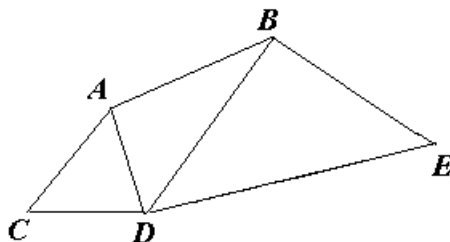
2. — Resolver el triángulo en el que se conocen los siguientes datos: $a = 5\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$, $\angle C = 47^\circ$
3. — Resolver el triángulo en el que se conocen los siguientes datos: $a = 23\text{ m}$, $\angle B = 53^\circ$, $\angle C = 84^\circ$
4. — En el mapa de un caminante el punto A queda a 2,5 pulgadas al oeste del punto B y el punto C queda a 3,5 pulgadas de B y a 4,2 pulgadas de A, respectivamente. Encuentre la orientación de A hacia C y la orientación de B hacia C. El dibujo sólo es referencial (el triángulo sólo es referencial)



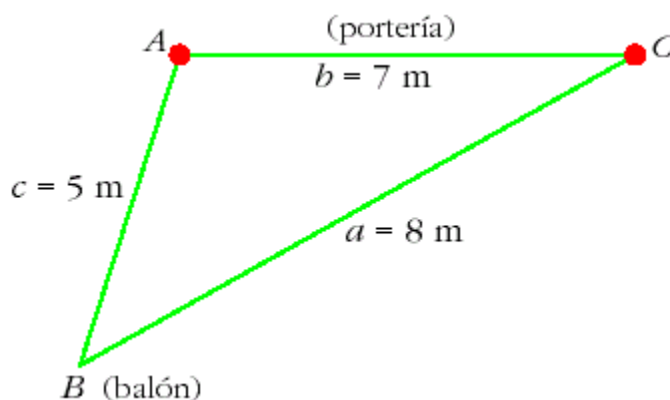
5. Dos puntos inaccesibles A y B son visibles desde D, pero no hay otro punto desde el cual ambos sean visibles. Se toma un punto C desde el cual puede verse A y D y se miden $CD = 200\text{ m}$, $\angle ADC = 89^\circ$, $\angle ACD = 50^\circ 30'$. Después se toma un punto E desde el cual sean visibles D y B y se miden

VIRGINIO GOMEZ

DE = 200 m, $\angle BDE = 54^\circ 30'$, $\angle BED = 88^\circ 30'$, desde D se mide $\angle ADB = 72^\circ 30'$. Determinar distancia AB



6. — Un barco navega hacia el Este, cuando observa una luz con una orientación $N62^{\circ}10'E$. Después de que el barco navega 250 m, la luz se encuentra a $N48^{\circ}25'E$. Si el curso se mantiene igual ¿Cuál será la menor distancia entre el barco y la luz?
7. — En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes del arco, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve el arco desde ese punto?

Respuesta

1. – $A : N 70^{\circ} E$, $B : N 40^{\circ} O$, $C S 15^{\circ} O$, $D : S 25^{\circ} E$
2. – $c = 3,7 m$, $\angle B = 51^{\circ} 46' 2''$, $\angle A = 81^{\circ} 13' 58''$
3. – $\angle A = 101^{\circ} 32' 13''$, $\angle B = 44^{\circ} 24' 55''$, $\angle C = 34^{\circ} 2' 52''$
4. – $N 33,66^{\circ} E$
 $N 2,82^{\circ} O$
5. – $AB = 345,45$ 6. – $325,9 m$
- 7.- 60^0

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Las ecuaciones trigonométricas son aquellas que se cumplen sólo para algunos valores particulares de los ángulos desconocidos.

Las ecuaciones trigonométricas suelen tener múltiples soluciones que pueden expresarse en grados o en radianes. Por lo tanto, el intervalo de la solución se encuentra en $0 \leq x \leq 2\pi$ o $0 \leq x \leq 360^\circ$

Ejemplo:

Encuentre x en : $\text{sen } x = 0$

La igualdad se cumple cuando $x = 0^\circ$, $x = 180^\circ$ o $x = 360^\circ$

RESOLUCION DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

No existe un método general para resolver ecuaciones trigonométricas, ya que va a depender de la forma que presenten, veamos algunas casos

A) LA ECUACION PUEDE FACTORIZARSE

Ejemplo

Resuelva $\text{sen } x - 2 \text{sen } x \cos x = 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

Respuesta

Factorizamos por $\text{sen } x$

$$\text{sen } x - 2 \text{sen } x \cos x = \text{sen } x (1 - 2 \cos x) = 0$$

luego tenemos que la solución de la ecuación se cumple cuando

$$i) \text{sen } x = 0 \quad \text{o} \quad ii) 1 - 2 \cos x = 0$$

en radianes

$$i) x = 0^\circ, \pi, 2\pi$$

$$ii) -2 \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$$

B) LAS DIFERENTES FUNCIONES QUE APARECEN EN LA ECUACION PUEDEN EXPRESARSE EN TERMINOS DE UNA FUNCION SENCILLA

Ejemplo

Resuelva $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 2$

Respuesta

Reemplacemos $\sec^2 x$ por $1 + \tan^2 x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

$$2 \tan^2 x + 1 + \tan^2 x = 2$$

$$3 \tan^2 x = 1$$

$$\tan^2 x = \pm \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto la solución es $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

C) AMBOS LADOS DE LA EXPRESION SE ELEVAN AL CUADRADO

Ejemplo

Resuelva $\sin x + \cos x = 1$ para $0 \leq x \leq 360^\circ$

Respuesta

$$\sin x + \cos x = 1 \quad / \quad ()^2$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = 1$$

$$2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = 0^\circ, 360^\circ$$

$$x = 90^\circ$$

Ejercicios

Encuentre x en $0 \leq x \leq 2\pi$

a) $2 \sin x - 1 = 0$

b) $2 \sec x = \tan x + \cotang x$

c) $\tan x + 3 \cotang x = 4$

d) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

e) $2 \cos x = 1 - \sin x$

f) $\sqrt{4 \sin x + 7} = 3$

$$g) \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$$

$$h) (\operatorname{tang} x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$$

$$i) \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$j) 3 \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

$$k) \cos^2 x = \cos x$$

Respuesta

$$a) x = \pi/6 \quad x = 5\pi/6$$

$$b) x = \pi/6 \quad x = 5\pi/6$$

$$c) x = \pi/4 \quad x = 1.25 \quad x = 5\pi/4 \quad x = 4.39$$

$$d) x = 0 \quad x = 4\pi/3 \quad x = 2\pi$$

$$e) x = \pi/2 \quad x = 5.64$$

$$f) x = \pi/6 \quad x = 5\pi/6$$

$$g) x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

$$h) x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad x = \frac{5\pi}{4} \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{3}$$

$$i) x = \frac{\pi}{2}$$

$$j) x = \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad x = \frac{4\pi}{3} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$k) x = 0 \quad x = \pi/2 \quad x = 3\pi/2 \quad x = 2\pi$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

La ecuación $x = \operatorname{sen} y$ define un valor único para y cuando x es conocido, la ecuación puede no tener solución o tener varias.

Por ejemplo, si $x = 2$, no hay solución, dado que el seno de un ángulo nunca excede de 1; Si $x = \frac{1}{2}$, existen varias soluciones para $y = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ \dots$

Para expresar y en función de x , se escribe

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$$

" y es un ángulo cuyo seno es x "

De manera similar , puede escribirse

$$\begin{aligned} y &= \arccos x, \quad \text{si } x = \cos y \\ y &= \arctan x, \quad \text{si } x = \tan y \end{aligned}$$

A veces es necesario considerar las relaciones trigonométricas inversas como funciones (a cada valor de y le corresponde un sólo valor admisible de x), para lograr esto, se acuerda seleccionar uno de los múltiples ángulos que le corresponden a determinado valor de x . Este valor escogido se llama valor Principal

Cuando x es positiva o cero y existe la función inversa, el valor principal está definido

Función Inversa	Intervalo valores principales
$y = \text{Arc sen } x$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \text{Arc cos } x$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{Arc tang } x$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \text{Arc cotan } x$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{Arc sec } x$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq -\pi/2$
$y = \text{Arc cosec } x$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0$

La función resulta

$$\begin{aligned} y &= \text{Arc sen } x \\ y &= \text{Arc cos } x \\ y &= \text{Arc tang } x \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\text{Arc sen } \sqrt{\frac{3}{2}} = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Ejercicios

- 1) $\text{Arc cos } \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $\text{Arc tang } 1$
- 3) $\text{Arc sen } 0$
- 4) $\text{Arc cos } (-1)$

Respuesta

- 1) $\frac{\pi}{6}$
- 2) $\frac{\pi}{4}$
- 3) 0
- 4) π

AUTOEVALUACION

- 1) Se necesita hallar la altura de una torre, si la distancia de la base de la torre al punto de observación son 30 m, formando un ángulo de 75 grados hasta la cima de la torre. ¿Cuál es la altura de la torre?
- 2) Calcular la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 60° y si retrocedemos 10 m, bajo un ángulo de 30°.
- 3) Un barco viaja desde un punto A hacia el Este una distancia de 48,6 kms, después cambia de dirección $S 16^{\circ} 40' E$ y recorre 37,8 kms ¿Qué distancia dista el barco desde A?

- 4) Determine el valor de x en $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$

a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cosec} x = 5/2$

b) $\operatorname{sen}^2 x - 2 \cos^2 x = 1$

- 5) Demuestre las siguientes identidades

a) $\operatorname{tag} t + \operatorname{sec} t \equiv \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}$

b) $\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x} \equiv 1$

- 6) Obtenga amplitud, periodo, desplazamiento Horizontal y vertical y Gráfica de :

$$y = 3 \operatorname{sen}(x - \pi) + 1$$

Respuesta

- 1) 111,96 m
- 2) 8,6m
- 3) 69,60 km
- 4) a) $x_1 = 30^{\circ}$, $x_2 = 150^{\circ}$
b) $x = 90^{\circ}$ o 270°
- 6) $a = 3$, $p = 2\pi$, fase : $x = \pi$, $d = 1$

CAPITULO V

NUMEROS COMPLEJOS

VIRGINIO GOMEZ

NUMEROS COMPLEJOS

Un número de la forma $z = a + bi$ en que $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se llama **número complejo**.

En $z = a + bi$

a se llama **PARTE REAL** del número complejo z

bi se llama **PARTE IMAGINARIA** del número complejo z .

El número complejo $a + bi$ es la forma binómica o algebraica de escribir el número complejo z .

$z = a + bi$	$a =$ parte real	si $a = 0$, el número bi se llama imaginario puro
	$bi =$ parte imaginaria	si $b = 0$, el número a es real

Ejemplo: el número $3 + 0i$ es un complejo real.

Ejemplo: el número $0 - 4i$ es un imaginario puro.

El número complejo $0 + 1i$ se llama **unidad imaginaria** y se representa por i .

$$0 + 1i = 0 + i = i$$



Ahora definimos el conjunto que contiene a todos los números complejos:

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bullet \quad i = \sqrt{-1} = i$$

$$\bullet \quad i^2 = -1$$

$$\bullet \quad i^3 = -\sqrt{-1} = -i$$

$$\bullet \quad i^4 = 1$$

En general, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$i^{4n-3} = \sqrt{-1} = i$$

$$i^{4n-2} = -1$$

$$i^{4n-1} = -\sqrt{-1} = -i$$

$$i^{4n} = 1$$

Ejercicios

Reduzca a la mínima expresión

1) $i^2 - i^3$

2) $3i^4 + 2i - i^5 - 4$

3) $2i + 4i^2 - 5i^4 - i$

4) i^{43}

5) $i^{-1} + 2i^{73} - i^{-35}$

6) $i^{37} + i^{126}$

7) $2i^{87} - 3i^{64} + i^{-216}$

Solución

1) $-1 + i$

3) $-9 + i$

5) 0

7) $-2 - 2i$

2) $-1 + i$

4) $-i$

6) $-1 + i$

Ejercicios

Identifique la parte real e imaginaria de cada uno de los siguientes números complejos:

a) $5 + 6i$

b) $-8i + 12$

c) $-78 - 14i$

d) -897

e) $4789i$

Respuestas:

a) 5 : parte real

$6i$: imaginaria

b) $-8i$: parte imaginaria

12 : parte real

c) -78 : parte real

$-14i$: parte imaginaria

d) $-897 = -897 + 0i$: número real

e) $4789i = 0 + 4789i$: número imaginario puro.

Representación gráfica de los números complejos

El número complejo $x + yi$ puede representarse gráficamente por el punto P de coordenadas rectangulares (x, y) .

El punto O , de coordenadas $(0, 0)$ representa el complejo $0 + 0i = 0$. Todos los puntos del eje X tienen coordenadas de la forma $(x, 0)$ y corresponden a números reales $x + 0i = x$. Por tal razón se llama al eje x , **eje de los reales o eje real**.

Todos los puntos del eje Y tienen coordenadas de la forma $(0, y)$ y corresponden a números imaginarios puros $0 + yi = yi$. El eje Y se llama por eso **eje de los imaginarios o eje imaginario**.

El plano en que se representan los números complejos se llama **plano complejo**.

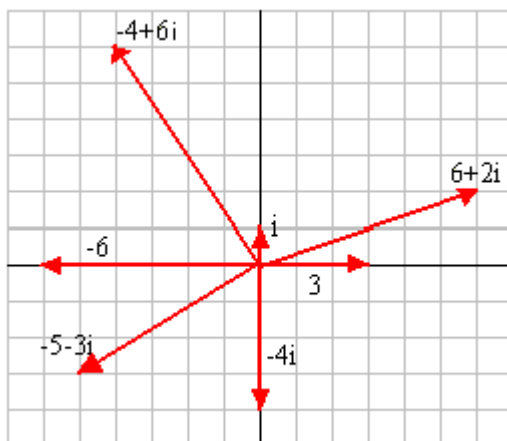


EJERCICIOS

Represente graficamente (en la misma figura)los siguientes complejos:

- | | |
|--------------|-------------|
| a) $-4 + 6i$ | b) $6 + 2i$ |
| c) 3 | d) i |
| e) $-5 - 3i$ | f) $-4i$ |
| g) -6 | |

Respuesta



Igualdad de números complejos:

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ se dicen iguales si y solo si, $a = c$ y $b = d$.

Ejemplo:

$$\text{Sean } z_1 = -5 + 8i \text{ y } z_2 = -5 + 8i$$

Identificamos cada parte que componen a z_1 y a z_2 :

$$\begin{aligned} z_1 &= -5 + 8i, & a &= -5 & \text{ y } & b &= 8i \\ z_2 &= 8i + (-5), & c &= -5 & \text{ y } & d &= 8i. \end{aligned}$$

Se puede observar que $a = c$ y por otro lado que $b = d$ por lo tanto decimos que

$$z_1 = z_2$$

Conjugado de un número complejo:

El conjugado de un número complejo $a + bi$ es el número complejo $a - bi$.

Notación: $\overline{a + bi} = a - bi$

Así, $2 + 3i$ y $2 - 3i$ son pares de números complejos conjugados.

Propiedades de los conjugados:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

d) $z + \overline{z} = 2a + 0i = 2a, \forall a \in \mathbb{R}$

e) $z - \overline{z} = 0 + 2bi = 2bi, \forall b \in \mathbb{R}$

Módulo :

El módulo de un número complejo $a + bi$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Notación: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Así por ejemplo, el módulo del número complejo $2 + 3i$ es $|2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

Propiedades de los módulos:

a) $|z| \geq 0$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

VIRGINIO GOMEZ

$$c) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$d) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$e) ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$$

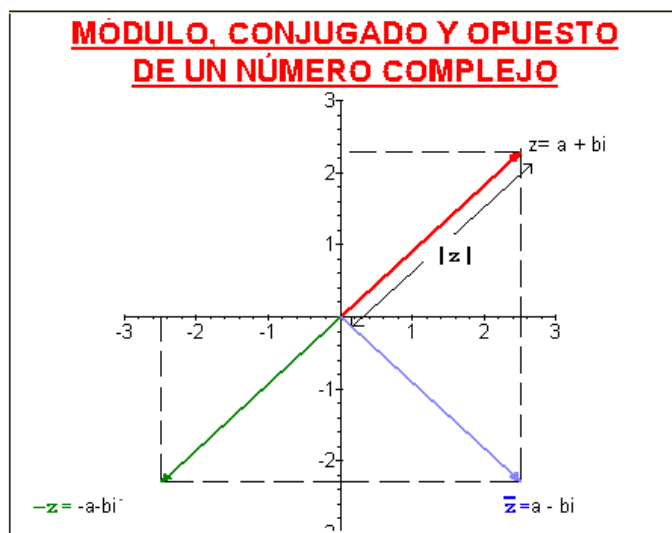
Opuesto de un número Complejo

El Opuesto o Inverso Aditivo de un Número Complejo $z = a + bi$ es
 $-z = -a - bi$

Ejemplo

Si $z = -2 + 3i$, su opuesto es $-z = 2 - 3i$

Representación gráfica del Módulo, Conjugado y Opuesto de un número Complejo



Ejercicios

Determine el opuesto y conjugado, de los siguientes números complejos

- | | | | |
|------------|-------------|--------------------|---------------------|
| a) $1 - i$ | b) $-1 + i$ | c) $\sqrt{3} + i$ | d) $-\sqrt{3} - i$ |
| e) -4 | f) $2i$ | g) $-\frac{3}{4}i$ | h) $2 + 2\sqrt{3}i$ |

Respuesta

- | | | |
|----|--------------------------|----------------------------|
| a) | Opuesto: $-1 + i$ | Conjugado: $1 + i$ |
| b) | Opuesto: $1 - i$ | Conjugado: $-1 - i$ |
| c) | Opuesto: $-\sqrt{3} - i$ | Conjugado: $-\sqrt{3} + i$ |
| d) | opuesto: $\sqrt{3} + i$ | conjugado: $-\sqrt{3} + i$ |
| e) | opuesto: 4 | conjugado: -4 |

f) opuesto : $-2i$ conjugado : $-2i$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

Adición: Para sumar dos complejos se suman las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$(x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (yi + bi) \\ = (x + a) + i(y + b).$$

Ejemplo:

$$(2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3i - 5i) \\ = 6 + (-2i) \\ = 6 - 2i$$

Propiedades de la adición:

Propiedad Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

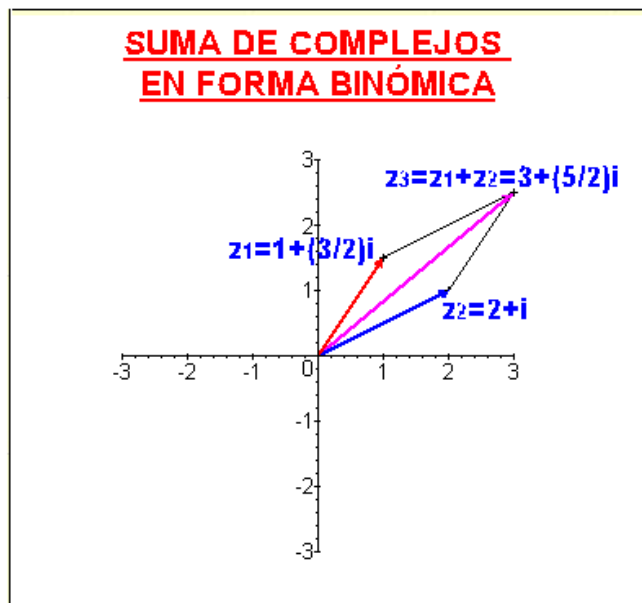
Propiedad Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Existencia del neutro: el número complejo $0 + 0i$ es tal que para $z_1 = a + bi$ se cumple que:

$$a + bi + 0 + 0i = (a + 0) + (bi + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

Inverso Aditivo: Dado el complejo $a + bi$, el número complejo $-a - bi$ es su simétrico pues: $a + bi + (-a - bi) = (a - a) + (bi - bi) = 0 + 0i$

Representación gráfica de la suma de números Complejos



Sustracción: Para restar dos números complejos, se restan las partes reales y las partes imaginarias por separado.

$$(x + yi) - (a + bi) = (x - a) + (yi - bi)$$

$$= (x - a) + i(y - b)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2 + 3i) - (4 - 5i) &= (2 - 4) + (3i + 5i) \\ &= -2 + (3 + 5)i \\ &= -2 + 8i\end{aligned}$$

La sustracción al ser operación inversa de la adición, posee las mismas propiedades que ella.

Multipliación: Para multiplicar dos complejos, multiplíquense como binomios los dos complejos y reemplácese i^2 por -1 .

$$\begin{aligned}(x + iy)(a + ib) &= xa + xib + iya + i^2yb \\ &= ax + bxi + ayi + i^2by \\ &= ax + i(bx + ayi) + (-1)by \\ &= (ax - by) + i(bx + ay)\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)(4 - 5i) &= 8 - 10i + 12i - 15i^2 \\ &= 8 + 2i - 15(-1) \\ &= 8 + 2i + 15 \\ &= 23 + 2i\end{aligned}$$

Propiedades de la multiplicación:

Asociativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Inverso Multiplicativo: El número complejo $1 + 0i$ es tal que para $z = a + bi$ se tiene: $(a + bi) \cdot (1 + 0i) = a + bi$

La multiplicación es distributiva con respecto a la suma:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$$

División: Para dividir dos complejos, multiplíquese numerador y denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

$$\begin{aligned}\frac{(x + iy)}{(a + ib)} &= \frac{(x + iy)}{(a + bi)} \frac{(a - bi)}{(a - bi)} \\ &= \frac{(ax - bxi + ayi - byi^2)}{(a^2 - abi + abi - b^2i^2)} \\ &= \frac{(ax - bi(-1) + i(ay - by))}{(a^2 + b^2)}\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{(2 + 3i)}{(4 - 5i)} &= \frac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} \\ &= \frac{8 + 10i + 12i + 15i^2}{16 + 20i - 20i - 25i^2} \\ &= \frac{8 + 22i - 15}{16 + 25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-7 + 22i}{41} \\ &= \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i \end{aligned}$$

Resumen de las Operaciones con Números Complejos

OPERACIONES		RESULTADOS
SUMA	$(a+bi) + (c+di) =$	$(a+c) + (b+d)i$
RESTA	$(a+bi) - (c+di) =$	$(a-c) + (b-d)i$
MULTIPLICACIÓN	$(a+bi)(c+di) =$	$(ac-bd) + (ad+bc)i$
DIVISIÓN	$\frac{a+bi}{c+di} =$	$\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

EJERCICIOS

Sean $z_1=1+i$ y $z_2=2-i$.

I) Calcule :

$$1) z_1 + z_2 \qquad 2) |z_1|$$

3) $\overline{z_2}$

4) $z_1 \cdot z_2$

5) $\frac{z_2}{z_1}$

II) Resuelva

$$1) \quad 2(3+i) - 4(5+i) - 7(4-i)$$

$$2) \quad (3 + 2i)^2$$

$$3) \quad (6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$$

4) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + (6 - 4i)$

5) $(3 + 2i)(4 - 2i)$

6) $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

7) $\frac{2+4i}{4-2i}$

8) $\frac{1 - 4i}{3 - i}$

9) $\frac{4 - 2i}{i}$

10) $6 - 3 \left(5 + \frac{2}{5}i \right)$

11) $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{(2 + 2i)}$

12) $\frac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$

13) $\frac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$

14) $\frac{2 + 5i}{3 - 2i} (1 - i)$

15) $\frac{1 + i}{2 - i} + \frac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

Respuestas:

I)

1) $3 + 0i = 3$

2) $\sqrt{2}$

3) $2 + i$

4) $3 + i$

II)

1) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

2) $5 + 12i$

3) $18 - 18i$

4) $-9i$

5) $16 + 2i$

6) $16 - 2i$

7) i

8) $-\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$

9) $-2 - 4i$

10) $-9 + \frac{6}{5}i$

11) $\frac{9}{4} + \frac{27}{4}i$

12) $3 + 6i$

13) $\frac{9}{20} - \frac{7}{20}i$

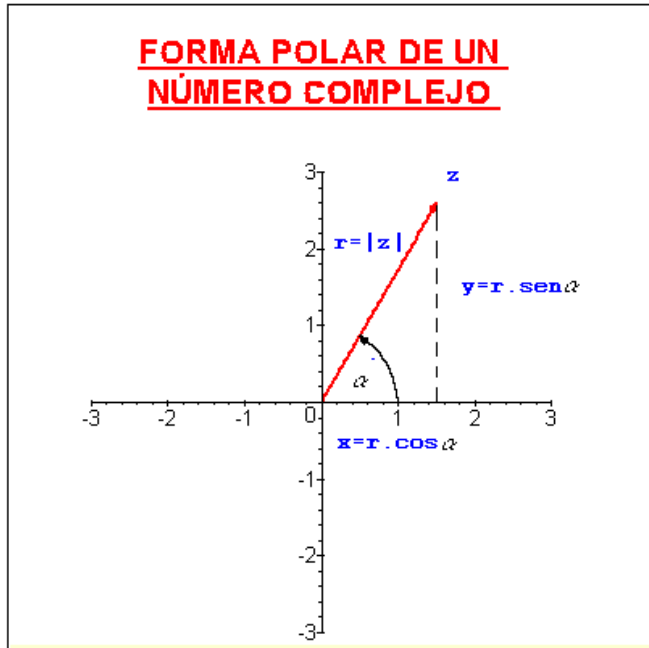
14) $\frac{15}{13} + \frac{23}{13}i$

15) $\frac{-7}{10} + \frac{13}{10}i$

VIRGINIO GÓMEZ

Forma Polar o Trigonométrica de números complejos:

Sea el número complejo $x + yi$ representado por el vector \overrightarrow{OP} .
Este vector se puede describir mediante la longitud r y α es el ángulo que el vector forme con el eje positivo de las x (eje real). El número r se llama módulo o valor absoluto del número complejo y el ángulo α se llama amplitud, argumento o valor principal del número complejo.



En la figura, $x = r \cos \alpha$ e $y = r \sen \alpha$.

Ahora veamos como se obtienen r y α :

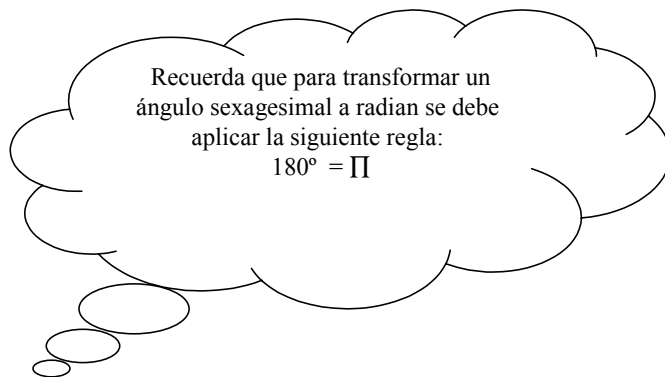
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{y}{x} \right)$$

Entonces:

$$z = x + iy = r \cos \alpha + i r \sen \alpha = r (\cos \alpha + i \sen \alpha).$$

Se dice entonces que $z = r (\cos \alpha + i \sen \alpha)$ es la **forma polar o trigonométrica** del número complejo z .

VIRGINIO GOMEZ



Ejemplo:

Expresa $z = -2 - 2i$ en forma polar:

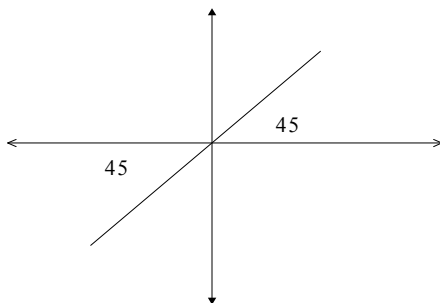
Respuesta

El módulo es $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

y $\alpha = \text{Arcotg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctg}\left(\frac{-2}{-2}\right) = \text{Arctg}(1)$

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Pero $z = -2 - 2i \in \text{III cuadrante}$ y el ángulo encontrado $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \in \text{I cuadrante}$.



Así $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Luego $z = r \text{ cis } \alpha$

$$= 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{5\pi}{4} = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{5\pi}{4} \right)$$

VIRGINIO GOMEZ

CUADRO RESUMEN

Forma binómica \Rightarrow Forma polar	Sabemos: $z = a + bi$
	Calculamos: $r = z = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\alpha = \arctan \frac{b}{a}$ $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ $z = r \operatorname{cis} \alpha$
Forma polar \Rightarrow Forma binómica	Sabemos: $z = r \operatorname{cis} \alpha$
	Calculamos: $a = r \cos \alpha$; $b = r \sin \alpha$ $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$

Ejercicio:

1) Exprese en forma trigonométrica (o polar) los siguientes números complejos:

- | | |
|---|---------------------|
| a) $-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | b) $6\sqrt{3} + 6i$ |
| c) $1 - i\sqrt{3}$ | d) $2 - 2i$ |
| e) $1 + \sqrt{3}i$ | f) $\sqrt{3} + i$ |
| g) $-1 + i$ | h) $5 - 12i$ |
| i) $3i$ | j) -5 |

2) Exprese el número complejo en forma cartesiana o binómica

- | | |
|--|--|
| a) $8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ | b) $2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3}$ |
| c) $4 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ | d) $2 (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ |
| e) $5 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ | f) $2 \operatorname{cis} 135^\circ$ |
| g) $2 \operatorname{cis} 495^\circ$ | h) $3 \operatorname{cis} 240^\circ$ |
| i) $5 \operatorname{cis} 180^\circ$ | j) $4 \operatorname{cis} 90^\circ$ |

Respuestas:

- | | |
|---|--|
| 1) | |
| a) $3 \operatorname{cis} (\frac{5\pi}{6}) = 3 \operatorname{cis} 150^\circ$ | b) $12 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ |
| c) $2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ | d) $2\sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ |

e) $2 \operatorname{cis} 60^\circ$

f) $2 \operatorname{cis} 30^\circ$

g) $\sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ$

h) $13 \operatorname{cis} 29^\circ 2' 37''$

i) $3 \operatorname{cis} 90^\circ$

j) 5

2)

a) $-4\sqrt{3} - 4i$

b) $1 - i\sqrt{3}$

c) $-2 - 2i\sqrt{3}$

d) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

e) $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

f) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

g) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

h) $-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

i) -5

j) $4i$

Producto y cociente de números complejos expresados en forma polar:

Sea $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \alpha_1$ y
 $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \alpha_2$.

La forma polar de un número complejo es especialmente cómoda a la hora de multiplicar, ya que basta con multiplicar los módulos y sumar los argumentos. es decir,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \operatorname{cis} \alpha_1) \cdot (r_2 \operatorname{cis} \alpha_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} (\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned}$$

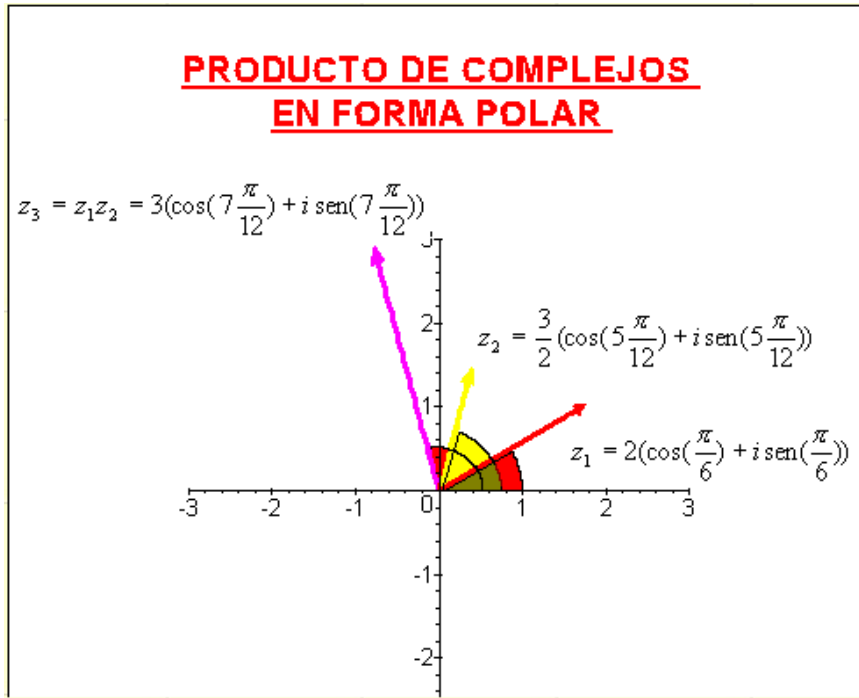
Por lo tanto, se define el **producto** de dos complejos a aquel número que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de sus argumentos

Ejemplo:

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{3}{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{12}\right) \\ &= 3 \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Representación gráfica del Producto



Para calcular el cociente de un complejo por otro no nulo basta con dividir los módulos y restar los argumentos, es decir:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \alpha_1}{r_2 \operatorname{cis} \alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Por lo tanto, se define el **cuociente** (ó división) de dos números complejos como aquel número que resulta de dividir los módulos y restar los argumentos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \alpha_1}{r_2 \operatorname{cis} \alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Ejemplo:

Sea $z_1 = 8 \operatorname{cis} 45^\circ$ y $z_2 = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$. Encuentre el cociente entre $\frac{z_1}{z_2}$

solución:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{8 \operatorname{cis} 45^\circ}{2 \operatorname{cis} 30^\circ} \\ &= \frac{8}{2} \operatorname{cis} (45^\circ - 30^\circ) \\ &= 4 \operatorname{cis} 15^\circ \\ &= 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios:

Realice las operaciones indicadas dando el resultado en forma polar y en forma cartesiana:

a) $5(\cos 170^\circ + i \operatorname{sen} 170^\circ)(\cos 55^\circ + i \operatorname{sen} 55^\circ)$

b) $\frac{4(\cos 220^\circ + i \operatorname{sen} 220^\circ)}{2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)}$

2) Exprese cada número en forma polar, efectúe las operaciones indicadas y de el resultado en forma cartesiana:

a) $\frac{(4 - 4i\sqrt{3})}{(-2\sqrt{3} + 2i)}$

b) $(3 - 3i\sqrt{3})(-2 - 2i\sqrt{3})$

Respuestas:

1) a) Forma polar: $5 \operatorname{cis} 225^\circ = 5(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$

Forma cartesiana: $-5\frac{\sqrt{2}}{2} - i 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Forma polar: $2 \operatorname{cis} 180^\circ$

Forma cartesiana: -2

2) a) $-\sqrt{3} + i$

b) -24

Potencia de un número complejo (Teorema de De Moivre)

Sea $z = r \operatorname{cis} \alpha$ un número complejo, entonces, una potencia de z es z^n .

Se define $z^n = (r \operatorname{cis} \alpha)^n = r^n \operatorname{cis} (n\alpha)$; con n entero.

Ejemplo:

Encuentre la décima potencia de $1 + i$

Sea $z = 1 + i$, entonces $z^{10} = (1 + i)^{10}$

Como z está expresado en forma cartesiana, debemos expresarlo en forma polar

$$z = 1 + i; r = \sqrt{2}; \alpha = \arctan(1) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Así } z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Entonces } z^{10} = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{10}$$

VIRGINIO GOMEZ

$$= (\sqrt{2})^{10} \operatorname{cis} \frac{10\pi}{4}$$

$$= (\sqrt{2})^{10} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{2}$$

Ejercicios

a) $(1 + i\sqrt{3})^4$

b) $(\sqrt{3} - i)^5$

c) $(-1 + i)^{10}$

d) $1 \operatorname{cis} 150^\circ \cdot 5 \operatorname{cis} 30^\circ$

e) $6 \operatorname{cis} 45^\circ : 3 \operatorname{cis} 15^\circ$

f) $2 \operatorname{cis} 10^\circ \cdot 1 \operatorname{cis} 40^\circ \cdot 3 \operatorname{cis} 70^\circ$

g) $5 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} : 1 \operatorname{cis} 60^\circ$

h) $(1 - \sqrt{3}i)^5$

Respuestas:

a) Forma cartesiana: $-8 - 8i\sqrt{3}$
Forma polar: $16 \operatorname{cis} 60^\circ$

b) Forma cartesiana: $-16\sqrt{3} - 16i$
Forma polar: $32 \operatorname{cis} 30^\circ$

c) Forma cartesiana: $-32i$
Forma polar: $32 \operatorname{cis} 270^\circ$

d) -5

e) $\sqrt{3} + i$

f) $-3 + 3\sqrt{3}i$

g) $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}i}{2}$

h) $16 + 16\sqrt{3}i$

Raíces de números complejos:

Definamos la raíz n -ésima de un número complejo z , como un número complejo w tal que:

$$w^n = z$$

– Si $z = r \operatorname{cis} \alpha$, una raíz n -ésima está dada por:

$$w = r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha}{n} \right)$$

Teorema de las raíces n -ésimas:

– Si $z = r \operatorname{cis} \alpha$, entonces z tiene " n " raíces n -ésimas (distintas), ellas están dadas por:

$$w = r^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis} \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right); k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1).$$

VIRGINIO GÓMEZ

Ejemplo:

Encuentre las 6 raíces de $z = -1 + i\sqrt{3}$

solución:

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Así las seis raíces sextas están dadas por:

$$w = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)}{6}; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$k = 0 \Rightarrow w_1 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(2\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow w_2 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(8\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$k = 2 \Rightarrow w_3 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(14\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$

$$k = 3 \Rightarrow w_4 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 3 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(20\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right)$$

$$k = 4 \Rightarrow w_5 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 4 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(26\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{9}\right)$$

$$k = 5 \Rightarrow w_6 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 5 \cdot \pi)}{6} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis} \frac{(32\pi)}{18} = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{16\pi}{9}\right)$$

Gráfica de las raíces sextas de $z = -1 + i\sqrt{3}$:

$$w_1 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right) \approx 1.055 + i 0.37$$

$$w_2 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right) \approx 0.19 + i 1.10$$

$$w_3 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right) \approx -0.85 + i 0.718$$

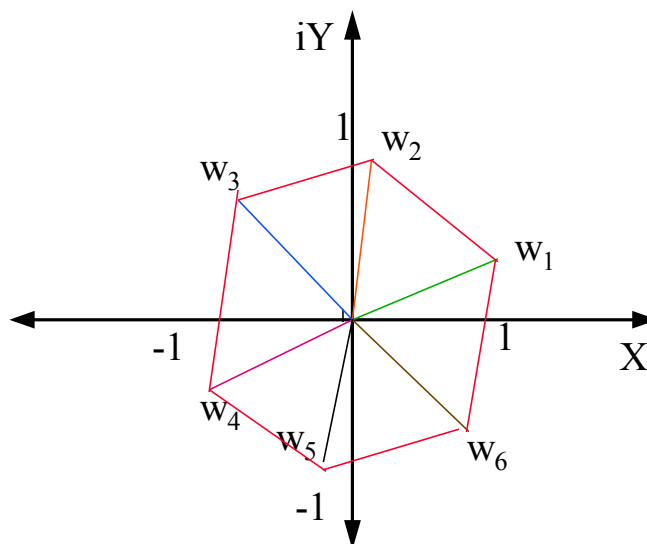
$$w_4 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right) \approx -1.04 - i 0.38$$

$$w_5 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{9}\right) \approx -0.2 - i 1.1$$

$$w_6 = 2^{\frac{1}{6}} \operatorname{cis}\left(\frac{16\pi}{9}\right) \approx 0.85 - i 0.71$$

VIRGINIO GOMEZ

Representación gráfica de las raíces:



Ejercicios

Encuentre las raíces que se indican y grafíquelas:

a) Las raíces cuadradas de $2 - 2i\sqrt{3}$

b) Las raíces cuartas de $-8 - 8i\sqrt{3}$

c) Las raíces cúbicas de $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$

d) $\sqrt[6]{-1}$

e) $\sqrt[3]{2 - 2i}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

g) $\sqrt[5]{\frac{32}{i}}$

Respuesta :

a) $w_1 = -\sqrt{3} + i$; $w_2 = \sqrt{3} - i$

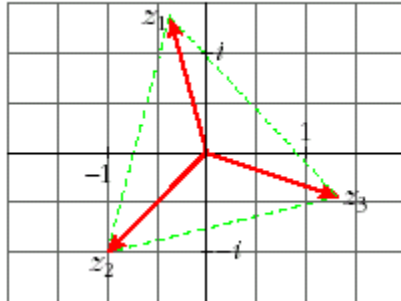
b) $w_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $w_2 = -\sqrt{3} + i$; $w_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $w_4 = \sqrt{3} - i$

c) $w_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $w_2 = 2(\cos 165^\circ + i \sin 165^\circ)$; $w_3 = 2(\cos 285^\circ + i \sin 285^\circ)$

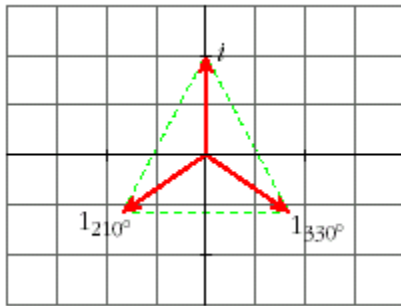
VIRGINIO GOMEZ

d) $w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$; $w_2 = i$; $w_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 345^\circ$;

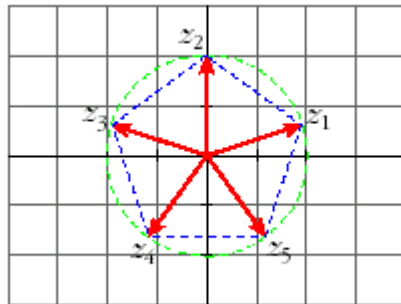
e) $w_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 105^\circ$; $w_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 225^\circ$; $w_3 = -1 - i\sqrt{3}$; $w_4 = \sqrt{3} - i$



f) $w_1 = 1 \operatorname{cis} 90^\circ = i$; $w_2 = 1 \operatorname{cis} 210^\circ$; $w_3 = 1 \operatorname{cis} 330^\circ$



g) $w_1 = 2 \operatorname{cis} 18^\circ$; $w_2 = 2 \operatorname{cis} 90^\circ$; $w_3 = 2 \operatorname{cis} 162^\circ$; $w_4 = 2 \operatorname{cis} 234^\circ$; $w_5 = 2 \operatorname{cis} 306^\circ$



VIRGINIO GOMEZ

AUTOEVALUACION

1) Determine el valor de

a) $i^{-2143} - 2i^{2431}$

2) Sean $z_1 = 2 + 2i$ y $z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} 225^\circ$, dos números complejos

Determine:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

c) z_1^5

d) $\sqrt[3]{z_1}$

3) $z_1 = -1 + i$
 $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$
 $z_3 = 2 \operatorname{cis} 50^\circ$

Determine:

a) $\frac{z_1 + \bar{z}_2}{2 \cos 20^\circ} - |z_3|$

b) $z_1 \cdot z_2 + \frac{2z_1}{z_2}$

c) $\frac{z_2^7}{z_3^8}$

d) $\bar{z}_2 : z_1$

e) $\frac{2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)}{7(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)5(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)}$

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta

1) a) $3i$

2) a) $8 \operatorname{cis} 270^\circ$ b) $\operatorname{cis} 180^\circ$

c) $(\sqrt{8} \operatorname{cis} 45^\circ)^5 = (\sqrt{8})^5 \operatorname{cis} 225^\circ$

d) $w_1 = (\sqrt{8})^{1/3} \operatorname{cis} 15^\circ$

$w_2 = (\sqrt{8})^{1/3} \operatorname{cis} 135^\circ$

$w_3 = (\sqrt{8})^{1/3} \operatorname{cis} 255^\circ$

3) a) $\frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} 135^\circ + 2 \operatorname{cis} 135^\circ}{2 \cos 20} - 2$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

c) $\frac{1}{2} \operatorname{cis} 200^\circ$

d) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)i$

e) $\frac{2}{35} \operatorname{cis} 38^\circ$

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO VII

POLINOMIOS

VIRGINIO GOMEZ

POLINOMIOS

Una función P definida por la ecuación :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes y $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, se denomina " POLINOMIO DE GRADO n ".

Donde el grado del polinomio es la mayor potencia a la cual está elevada el valor " x ".

Ejemplos:

a) $P(x) = x + x^2$; $\text{grado}(P) = 2$

b) $Q(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \sqrt{\pi} x^{15}$; $\text{grado}(Q) = 15$

c) $R(x) = \frac{x^2 + 7x^3}{x + 5}$; $\text{grado}(R) = ?$, $R(x)$ no es polinomio.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Adición: Para sumar 2 o más polinomios, primero se ordena cada polinomio de mayor a menor grado, y luego se suman los términos que son semejantes.

Ejemplos:

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3 \quad \text{y} \quad Q(x) = 9 - x^3 + 2x + 3x^2$$

Primero ordenemos los polinomios:

$$P(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3$$

$$Q(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 9$$

Luego se suman los términos que son semejantes:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (5x^3 - x^3) + (-2x^2 + 3x^2) + 2x + (-3 + 9) \\ &= 4x^3 + x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

Sustracción: Para restar dos polinomios, se procede de igual forma que la adición:

Ejemplos:

$$P(x) = -\frac{3}{5}x^5 + 12x^4 - 8 \quad \text{y} \quad Q(x) = -16x^2 + \frac{8}{3}x - x^5 + 6$$

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (-\frac{3}{5}x^5 + 12x^4 - 8) - (-16x^2 + \frac{8}{3}x - x^5 + 6) \\ &= \frac{2}{5}x^5 + 12x^4 + 16x^2 - \frac{8}{3}x - 14 \end{aligned}$$

Producto: Para multiplicar dos o más polinomios se debe multiplicar cada elemento punto a punto y luego se ordena el polinomio resultante de mayor a menor grado.

Ejemplo:

$$\text{Multiplique } P(x) = 2x - 3 \quad \text{con} \quad Q(x) = 3x^2 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x - 3) \cdot (3x^2 - 2x + 3) \\ &= 6x^3 - 4x^2 + 6x - 9x^2 + 6x - 9 \\ &= 6x^3 - 13x^2 + 12x - 9 \end{aligned}$$

Si un polinomio $A(x)$ es de tercer grado y un polinomio $B(x)$ es de segundo grado. ¿Cuál es el grado del polinomio $A(x) \cdot B(x)$?

$A(x) \cdot B(x)$ es de quinto grado.

Ejercicios

Sean $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$; $Q(x) = 2x^2 + x - 1$; $R(x) = 3x - 2$; tres polinomios. Realice las operaciones que se indican:

- a) $P(x) + Q(x) =$
- b) $Q(x) - R(x) =$
- c) $5P(x) - 7R(x) =$
- d) $6Q(x) - 3P(x) + 5R(x) =$
- e) $P(x) \cdot R(x) =$
- f) $8P(x) \cdot 4Q(x) =$

Respuesta

- a) $2x^3 - x^2 + 2x + 4$
- b) $2x^2 - 2x + 1$
- c) $10x^3 - 15x^2 - 16x + 39$
- d) $-6x^3 + 21x^2 - 18x - 31$
- e) $6x^4 - 13x^3 + 9x^2 + 13x - 10$
- f) $128x^5 - 128x^4 - 96x^3 + 160x^2 - 16x - 16$

División: Para dividir un polinomio $F(x)$ por otro $G(x)$ se utiliza el método de la división algebraica.

Ejemplo:

Divida $F(x) = x^4 - 16$ por $G(x) = x^2 + 3x + 1$

$$x^4 - 16 : x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + 8$$

$$\begin{array}{r} -(x^4 + 3x^3 + x^2) \\ \hline -3x^3 - x^2 - 16 \\ -(3x^3 + 9x^2 + 3x) \\ \hline 8x^2 + 3x - 16 \\ -(8x^2 + 24x + 8) \\ \hline -21x - 24 \end{array}$$

Donde $F(x) = x^4 - 16$ (dividendo)

$G(x) = x^2 + 3x + 1$ (divisor)

$S(x) = x^2 - 3x + 8$ (cuociente)

$R(x) = -21x - 24$ (resto o residuo)

Así se tiene: $F(x) = G(x) \cdot S(x) + R(x)$

$DIVIDENDO = DIVISOR \cdot CUOCIENTE + RESTO$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 8) + (-21x - 24)$$

TEOREMA DEL CUOCIENTE Y RESTO

Si $F(x)$ y $G(x) \neq 0$ son polinomios, entonces existen polinomios únicos $S(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$F(x) = G(x) \cdot S(x) + R(x) \quad , \text{ donde } S(x) = \text{cuociente} \\ \text{y } R(x) = \text{resto}$$

Observación: El grado de $R(x)$ debe ser menor que $G(x)$

Ejercicios

Hallar el cuociente y resto de los siguientes polinomios

a) $6x^6 - 5x^5 - 5x^4 - \frac{17}{2}x^3 + 6x^2 - 2 : 2x^3 - 3x^2 + 1 =$

b) $5x^3 - 14x + 3 : x - 2 =$

c) $x^4 - 2x^3 + 4x - 6 : x - 2 =$

d) $3x^2 - 4 : x + 1$

e) $x^3 - x^2 + 1 : x^2 + 5x - 2$

f) $x^4 + 3x^2 + 2x + 3 : x^2 + 4x - 1$

g) $3x^3 + 4x^2 - 5x + 2 : x + 2$

Respuesta

a) $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 5$

$R(x) = -11x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

b) $S(x) = 5x^2 + 10x + 6$

$R(x) = 15$

c) $S(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 12$
 $R(x) = 18$

d) $S(x) = 3x - 3$
 $R(x) = -1$

e) $S(x) = x - 6$
 $R(x) = 34x - 11$

f) $S(x) = x^2 - 4x + 20$
 $R(x) = -82x + 23$

g) $S(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 $3x^2 -$

Observemos los ejercicios b y c donde el divisor es de la forma $(x - c)$. Cuando ocurre esto, se puede utilizar otro método de división denominado "**DIVISION SINTETICA O METODO DE RUFFINI HORNER**".

Ejemplo:

$$5x^3 - 14x + 3 : x - 2 =$$

Primero debemos agregar los grados que le faltan al polinomio

$$5x^3 + 0x^2 - 14x + 3$$

Luego los factores numéricos se anotan en una tabla, tanto los del dividendo como los del divisor:

5	0	-14	3	$x - 2$
	10	20	12	2
5	10	6	15	

donde $R(x) = 15$ y $S(x) = 5x^2 + 10x + 6$

Así
$$F(x) = G(x) \cdot S(x) + R(x)$$

$$5x^3 + 0x^2 - 14x + 3 = (x - 2) \cdot (5x^2 + 10x + 6) + 15$$

Ejercicios:

Divida utilizando división sintética:

a) $2x^3 - x^2 + 2x - 5$ por $x + 2$

b) $3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}x - 1$ por $x - 1$

Respuesta:

a) $2x^3 - x^2 + 2x - 5 = (2x^2 - 5x + 12)(x - 2) - 29$

b) $3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}x - 1 = (x - 1)(3x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \frac{4}{3}) - \frac{7}{3}$

TEOREMA DEL RESTO O RESIDUO

Si un polinomio $P(x)$ se divide por $(x - \alpha)$, entonces el residuo es $P(\alpha)$.

Ejemplo: Sea $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}x - 1$, hallar $P(-1)$.

Solución : Debemos encontrar el resto, teniendo como divisor $(x + 1)$

3	0	-2	0	$\frac{1}{3}$	-1	$x + 1$
-3		3	-1	1	$\frac{4}{3}$	-1
3 - 3		1	-1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	

Luego si evaluamos $x = -1$ en $P(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P(x = -1) &= 3x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}x - 1 \\
 &= 3(-1)^5 - 2(-1)^3 + \frac{1}{3}(-1) - 1 \\
 &= -\frac{7}{3} \text{ que es el resto.}
 \end{aligned}$$

Definición:

Un número α se dice **cero del polinomio P** o una **raíz de la ecuación $P(x) = 0$** si $P(\alpha) = 0$

Ejemplo:

El polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ tiene a $(x - 2)$ como factor pues $P(2) = 0$

1	-4	3	2	$x - 2$
	2	-4	-2	2
1	-2	-1	0	

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (x - 2)(x^2 - 2x - 1)$$

Ejercicios

- 1) Demuestre que $(x - 3)$ es un factor del polinomio $F(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$
- 2) ¿Es -1 una raíz de $F(x) = x^3 - 7x - 6$?
- 3) ¿Es 2 una raíz de $F(x) = x^4 - 2x^2 - x + 7$?

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Todo polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene un cero real o complejo.

Este teorema nos dice que el polinomio $P(x)$ puede tener más de una raíz real (compleja). Pero ¿cómo saber cuales son esas posibles raíces, y de que naturaleza son?

Para resolver esta interrogante, utilizaremos dos métodos:

1.- Regla de Descartes : (queda determinada la naturaleza de las posibles raíces)

Raíces positivas: números de variaciones de signo, en el polinomio $P(x)$

Raíces negativas: números de variaciones de signo en el polinomio $P(-x)$

Raíces complejas: es el número de raíces que faltan para completar el grado del polinomio $P(x)$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sea } P(x) &= x^9 - 3x^5 + 2x^2 - x + 12 && : 4 \text{ variaciones de signo} \\ P(-x) &= -x^9 + 3x^5 + 2x^2 + x + 12 && : 1 \text{ variación de signo} \end{aligned}$$

Se completa la siguiente tabla:

+	-	ℂ
4	1	4
2	1	6
0	1	8

Nota: El grado del polinomio $P(x)$ es 9.

Así el polinomio $P(x)$ puede tener las siguientes combinaciones de raíces:

- a) 4 raíces positivas - 1 raíz negativa - 4 raíces complejas.
- b) 2 raíces positivas - 1 raíz negativa - 6 raíces complejas.
- c) 1 raíz positiva - 1 raíz negativa - 8 raíces complejas.

Observación:

Si un polinomio $P(x)$ de coeficientes reales tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$, entonces también tiene como raíz compleja al conjugado $a - bi$.

2.-Cálculo de las raíces racionales de un polinomio con coeficientes reales:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ un polinomio, donde a_n es el primer término del polinomio $P(x)$ y a_0 el término independiente.
Las posibles raíces racionales se obtienen de encontrar los divisores de a_n y a_0 respectivamente, y luego hacer un cociente entre los divisores de a_0 por los divisores de a_n .

$$\text{Posibles raíces: } \frac{D(a_0)}{D(a_n)}$$

Ejemplo:

1. – Calcule las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$
solución:

Identifiquemos a_n y a_0 respectivamente:

$$\begin{aligned} a_0 &= -6 \\ a_n &= 2 \end{aligned}$$

Ahora buscamos los divisores de $a_n = 2$ y $a_0 = -6$

$$D(a_0) = D(-6) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

$$D(a_n) = D(2) = \pm 1, \pm 2.$$

Luego se forma el cociente entre los divisores de a_0 y a_n :

$$\frac{D(a_0)}{D(a_n)} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}{\pm 1, \pm 2}$$

Entonces se obtienen las posibles raíces racionales:

$$R(\mathbb{Q}) = \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \right\}$$

Busquemos por ejemplo $x = -1$

2	1	-7	-6	$x+1$
-2		1	6	1
2	-1	-6	0	

Por lo tanto $x = -1$ es raíz

$$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(2x^2 - x - 6)$$

Ahora probemos con otra raíz: $x = 2$:

2	-1	-6	$x-2$
4		6	2
2	3	0	

Por lo tanto $x = 2$ es raíz

$$\text{Así } 2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x+1)(x-2)(2x+3)$$

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 \\ 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

\therefore Las raíces de $P(x)$ son $-1, 2$ y $\frac{-3}{2}$

2. - Veamos otro ejemplo:

Descomponer completamente el polinomio

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 \text{ y hallar su orden de multiplicidad.}$$

solución: Utilizando los dos métodos anteriores, tenemos:

VIRGINIO GOMEZ

-Regla de Descartes:

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 : 4 \text{ variaciones de signo}$$

$$P(-x) = -x^5 - 6x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 12x + 8 : 1 \text{ variación de signo}$$

Luego, las posibles combinaciones son:

+	-	\mathbb{C}
4	1	0
2	1	2
0	1	4

-Raíces de un polinomio con coeficientes reales:

Ahora buscamos los divisores de $a_n = -1$ y $a_0 = 8$

$$D(a_0) = D(8) = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

$$D(a_n) = D(1) = \pm 1.$$

Luego se forma el cociente entre los divisores de a_0 y a_n :

$$\frac{D(a_0)}{D(a_n)} = \frac{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8}{\pm 1}$$

Entonces se obtienen las posibles raíces racionales:

$$R(\mathbb{Q}) = \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8 \right\}$$

Probemos con $x = 2$:

1	-6	11	-2	-12	8	$x-2$
	2	-8	6	8	-8	2
1	-4	3	4	-4	0	

Es decir $x = 2$ es raíz del polinomio $P(x)$.

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = (x-2)(x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4)$$

Probemos nuevamente con $x = 2$ para ver si es raíz más de una vez :

1	-4	3	4	-4	$x-2$
	2	-4	-2	4	2
1	-2	-1	2	0	

Nuevamente $x = 2$ es raíz de $P(x)$.

Y el polinomio queda factorizado como:

$$\begin{aligned} x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 &= (x-2)(x-2)(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= (x-2)^2(x^3 - 2x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Probemos otra vez si $x = 2$ es raíz:

VIRGINIO GOMEZ

1	-2	-1	2	$x-2$
	2	0	-2	2
1	0	-1	0	

Nuevamente $x = 2$ es raíz

Ahora $P(x)$ se factoriza como:

$$\begin{aligned} x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 &= (x-2)(x-2)(x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)^3(x^2-1) \end{aligned}$$

Pero sabemos desarrollar ecuación $(x^2-1) = 0$

obteniendo 2 raíces: $x = -1$ y $x = 1$.

Finalmente el polinomio queda completamente factorizado como:

$$\begin{aligned} x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 &= (x-2)(x-2)(x-2)(x+1)(x-1) \\ &= (x-2)^3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

Observe que $x = 2$ es una raíz triple.

Ejercicios: Encuentre las raíces de

- a) $x^3 - 7x - 6$
- b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
- c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$
- d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$
- e) $x^5 - 16x$
- f) $x^3 - 3x^2 + 2x$
- g) $x^3 - x^2 + 4x - 4$

VIRGINIO GOMEZ

Respuesta:

a) $x_1 = -1; x_2 = -2; x_3 = 3$

-1	1	0	-7	-6	
		-1	1	6	
	1	-1	-6	0	0
-2		-2	6		
	1	-3	0		0
3		3			
	1	0			0

b) $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = \frac{5}{2}$

1	2	-3	-9	10	
		2	-1	-10	
	2	-1	-10	0	0
-2		-4	10		
	2	-5	0		0

c) $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = 3$

1	1	-5	5	5	-6	
		1	-4	1	6	
	1	-4	1	6	0	0
-1		-1	5	-6		
	1	-5	6	0		0
2		2	-6			
	1	-3	0			0
3		3				
	1	0				0

d) $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = \frac{1}{3}$

1	3	-10	9	-2	
		3	-7	2	
	3	-7	2	0	0
2		6	-2		
	3	-1	0		0

e) $x(x^4 - 16) = 0; x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -2$

f) $x(x^2 - 3x + 2) = 0; x(x - 1)(x - 2) = 0$
 $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$

g) $x = 1$

1	1	-1	4	-4	
1		1	0	4	
	1	0	4	0	0

VIRGINIO GOMEZ

CAPITULO VIII

INDUCCION MATEMATICA

VIRGINIO GOMEZ

INDUCCION:

Entre las herramientas más utilizadas en matemáticas se encuentra un método de demostración llamado **Método de Inducción Matemática**.

Este método se basa en un método deductivo y se utiliza específicamente para demostrar la validez de ciertas proposiciones para un subconjunto de números naturales.

PRIMER PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA:

Si S es un subconjunto de \mathbb{N} que verifica:

i) $1 \in S$

ii) $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$

entonces $S = \mathbb{N}$

El primer principio de inducción matemática (P.I.M), se emplea para demostrar propiedades de los números naturales. Por ejemplo, si hay interés en demostrar que los números naturales poseen o tienen una cierta propiedad P , entonces se define el subconjunto S de \mathbb{N} formado por todos los números naturales que tienen la propiedad P .

$$S = \{a : a \in \mathbb{N} \text{ y } a \text{ tiene la propiedad } P\}$$

Luego si probamos que $S = \mathbb{N}$, habremos demostrado que todos los números naturales tienen la propiedad P .

Pero para demostrar que $S = \mathbb{N}$, basta probar que:

1) $1 \in S$ (es decir basta comprobar que el 1 tiene la propiedad P)

2) $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ (esto es del supuesto que n tiene la propiedad P , se debe probar que $n + 1 \in S$ también tiene la propiedad P).

Ejemplos:

1.- La suma de los n primeros números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$ es decir :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Respuesta:

Se define la propiedad $P_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ y el conjunto $S = \{n : n \in \mathbb{N} / P_n \text{ es verdadera}\}$

Demostración

1) Probemos que se cumple para $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}; \quad 1 = \frac{1(2)}{2}; \quad 1 = 1$$

$\therefore P_1$ es verdadera, luego $1 \in S$.

2) Supongamos que $n = k \in S$; P_k es verdadera:

$$P_k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{k(k+1)}{2}$$

3) Probemos que $n = k + 1 \in S$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

$\therefore n = k + 1 \in S$.
Así $S = \mathbb{N}$.

2.- La suma de los n primeros números naturales impares es n^2 , es decir:

$$1 + 3 + 5 + 7 \dots + (2n - 1) = n^2$$

Respuesta:

Se define la propiedad $P_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ y el conjunto $S = \{n : n \in \mathbb{N} / P_n \text{ es verdadera}\}$

1) Probemos para $n = 1$:

$$1 = 1^2; \quad 1 = 1$$

$\therefore P_1$ es verdadera, luego $1 \in S$.

2) Supongamos que $n = k \in S$; P_k es verdadera:

$$P_k = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

3) Probemos que $n = k + 1 \in S$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + ((2k+2) - 1) &= k^2 + (2(k+1) - 1) \\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 2) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

$\therefore n = k + 1 \in S$.
Así $S = \mathbb{N}$.

VIRGINIO GOMEZ

3.- $n^3 + 2n$ es divisible por 3

Respuesta:

Se define la propiedad $P_n = n^3 + 2n$ es divisible por 3, es decir
 $n^3 + 2n = 3 \cdot p$
 $S = \{n : n \in \mathbb{N} / P_n \text{ es verdadera}\}$

1) Probemos para $n = 1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2 \cdot 1 &= 3 \cdot p \\ 1 + 2 &= 3 \cdot p \\ 3 &= 3 \cdot p \\ 3 &= 3 \cdot 1, p = 1 \end{aligned}$$

$\therefore P_1$ es verdadera, luego $1 \in S$.

2) Supongamos que $n = k \in S$; P_k es verdadera:

$P_k = k^3 + 2k$ es divisible por 3, es decir $k^3 + 2k = 3 \cdot p$ (hipótesis)

3) Probemos que $n = k + 1 \in S$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 + 2(k+1) &= 3 \cdot p \\ (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) &= 3 \cdot p \\ k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 &= 3 \cdot p \\ (k^3 + 2k) + (3k^2 + 3k + 3) &= 3 \cdot p \\ \downarrow + 3(k^2 + k + 1) &= 3 \cdot p \\ \text{hip.) } + 3 \cdot (k^2 + k + 1) &= 3 \cdot p \end{aligned}$$

\downarrow
múltiplo de 3

$\therefore n = k + 1 \in S$.
 Así $S = \mathbb{N}$.

múltiplo de 3 (por

Ejercicios propuestos:

Demuestre por Inducción matemática las siguientes proposiciones.

a) La suma de los cubos de los n primeros números naturales es $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$; es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

b) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$

c) $4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n+1)$

d) $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

f) $3^{2n} + 7$ es un múltiplo de 8

CAPITULO IX

TEOREMA DEL BINOMIO

VIRGINIO GOMEZ

TEOREMA DE BINOMIO DE NEWTON:

Buscaremos descubrir una fórmula para el desarrollo de $(a + b)^n$ por medio de la inducción ordinaria; es decir, veremos algunos casos especiales y trataremos de establecer una fórmula general de los mismos.

Para comenzar, se calcularemos directamente las 5 primeras potencias de números naturales de $(a + b)^n$:

$$\begin{aligned}(a + b)^1 &= a + b \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\(a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Del desarrollo anterior se obtienen las siguientes observaciones:

- 1.- El desarrollo $(a + b)^n$ tiene $n + 1$ elementos.
- 2.- La potencia de a va reduciéndose en uno(1) en cada término de izquierda a derecha.
- 3.- La potencia de b va aumentando en uno (1) en cada término de izquierda a derecha.
- 4.- En cada término la suma de las potencias de a y b es igual a n .
- 5.- El coeficiente del término siguiente se obtiene multiplicando el coeficiente del término dado por el exponente de a y dividiéndolo entre el número que representa la posición que ocupa dicho término en el binomio.

Ejemplo:

Si queremos determinar el tercer término de $(a + b)^4$ se tiene:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + \boxed{?} +$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6; \quad \text{donde : } 4 = \text{coeficiente } a$$

$$3 = \text{exponente de } a$$

$$2 = \text{Lugar que ocupa.}$$

Luego el término que buscamos es: $6a^2b^2$

Fórmula General del Binomio:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

donde $\binom{n}{k}$ representa el número de combinaciones de " n sobre k "

La combinación $(n \text{ sobre } k)$ tiene el siguiente desarrollo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

El símbolo $n!$ representa el producto de los n primeros números naturales:

$$n! = n(n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Se define $0! = 1$
 $1! = 1$

Ejemplo:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot 6!}{6!} = 7$$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Ahora determinemos la combinación de:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! 3!} = \frac{8!}{5! 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{(9-2)! 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)! 5!} = \frac{5!}{0! 5!} = \frac{5!}{1 \cdot 5!} = 1$$

OBSERVACIÓN:

En su calculadora usted puede obtener las combinaciones con la tecla " $n C r$ "

Ahora como conocemos los conceptos de factorial y combinación, determinemos el desarrollo completo de un binomio:

Ejercicio:

Realice el desarrollo de $(m + n)^3$

solución:

Utilizando la forma general de binomio, se tiene :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(m + n)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} m^{3-k} n^k$$

$$= \binom{3}{0} m^3 n^0 + \binom{3}{1} m^2 n + \binom{3}{2} m^1 n^2 + \binom{3}{3} m^0 n^3$$

$$= m^3 + 3m^2 n + 3mn^2 + n^3$$

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned}
 (3u + 2v)^4 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad n = 4; k = 0, 1, 2, 3, 4. \\
 (3u + 2v)^4 &= \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} (3u)^{4-k} (2v)^k \\
 &= \binom{4}{0} (3u)^4 (2v)^0 + \binom{4}{1} (3u)^3 (2v)^1 + \binom{4}{2} (3u)^2 (2v)^2 + \\
 &\quad + \binom{4}{3} (3u)^1 (2v)^3 + \binom{4}{4} (3u)^0 (2v)^4 \\
 &= (3u)^4 + 4(3u)^3 * (2v) + 6(3u)^2 * (2v)^2 + 4(3u)^1 * (2v)^3 + (2v)^4 \\
 &= 81u^4 + 4(27u^3) * (2v) + 6(9u^2) * (4v^2) + (12u) * (8v^3) + (16v^4) \\
 &= 81u^4 + 216u^3v + 216u^2v^2 + 96uv^3 + 16v^4
 \end{aligned}$$

Ejercicios

Desarrolle cada una de las expresiones siguientes mediante el teorema del binomio y simplifique si es necesario:

- a) $(x + 2)^3$
- b) $(u - v)^5$
- c) $(3p - q)^4$

Ahora veremos cómo determinar un término cualquiera sin tener que realizar el desarrollo completo de ese binomio:

Término r -ésimo de un binomio:

El término T_r se obtiene de la siguiente forma:

$$T_r = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k ; \text{ donde } T_r = T_{k+1}$$

Ejemplo:

Determine el séptimo término de $(2x - y)^{12}$

Respuesta

$$T_7 = T_{k+1} = T_{6+1} \quad \text{donde } k \text{ entonces es } 6$$

$$\binom{12}{k} (2x)^{12-k} \cdot (-y)^k$$

VIRGINIO GOMEZ

$$\binom{12}{6}(2x)^{12-6} \cdot (-y)^6$$

$$= 924(64x^6) \cdot (-y)^6$$

$$= 924 \cdot 64x^6y^6$$

Así el séptimo término de $(2x - y)^{12}$ es $59136 x^6y^6$

Otro ejemplo:

Determine el término que contiene a x^6 del binomio $(x^2 - \frac{1}{2})^{12}$

Respuesta

El desarrollo de este binomio es:

$$= \binom{12}{k}(x^2)^{12-k} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \binom{12}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot (x)^{24-2k}$$

El término que contiene a x^6 está dado por:

$$x^6 = x^{24-2k}$$

Igualamos exponentes, y se obtiene:

$$6 = 24 - 2k$$

Luego despejamos k y tenemos:

$$2k = 18$$

$$\mathbf{k = 9}$$

Como k es un número entero ($k \in \mathbb{Z}$), entonces existe el término y este es x^6

$$\begin{aligned} T_{k+1} = T_{9+1} = T_{10} &= \binom{12}{9}(x^2)^{12-9}\left(-\frac{1}{2}\right)^9 \\ &= 220 x^6 \cdot \left(-\frac{1}{512}\right) \\ &= -\frac{220}{512}x^6 = -\frac{55}{128}x^6 \end{aligned}$$

VIRGINIO GOMEZ

Términos centrales de un binomio.

-Si n es par se tiene un sólo término central:

$$T_{c=\frac{n}{2}+1}$$

- Si n es impar se obtienen 2 términos centrales, dados por:

$$T_{c1} = \frac{n+1}{2} \quad y \quad T_{c2} = \frac{n+1}{2} + 1$$

Ejemplo:

Obtener el o los términos centrales de:

$$(a+b)^5$$

solución:

Como $n = 5$ es impar se obtienen dos términos centrales, dados por:

$$T_{c1} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow T_3 = T_{k+1} \Rightarrow k = 2$$

$$T_{c2} = \frac{5+1}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 \Rightarrow T_4 = T_{k+1} \Rightarrow k = 3$$

$$T_{c1} = \binom{5}{2} (a)^{5-2} (b)^2 = 10a^3b^2$$

$$T_{c2} = \binom{5}{3} (a)^{5-3} (b)^3 = 10a^2b^3$$

Término independiente.

Este término no siempre existe, para determinarlo sabemos que es aquél donde no aparecen el término con variables, por ejemplo x , es decir, es x^0 .

Así para el binomio $(x^2 - \frac{1}{2})^{12}$ el término independiente está dado por:

$$\begin{aligned} x^0 &= x^{24-2k} \Rightarrow 24 - 2k = 0 \\ -2k &= -24 \\ k &= 12 \end{aligned}$$

como $k \in \mathbb{Z}$, entonces existe término independiente.

$$T_r = T_{k+1} = T_{12+1} :$$

$$\binom{12}{12} (x^2)^{12-12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = (x^0) \left(-\frac{1}{2}\right)^{12}$$

$$= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = 1 \cdot \left(\frac{1}{4096}\right) = \left(\frac{1}{4096}\right)$$

VIRGINIO GOMEZ

Ejercicios

Escriba y simplifique el término que se indica en el desarrollo de cada una de las siguientes expresiones:

- a) Noveno término de $(2 + \frac{x}{4})^{15}$
- b) Término que contiene a x^7 de $(2x - 3)^{10}$
- c) Términos centrales de $(2 + \frac{3}{x})^9$
- d) Término independiente de $(5 - 2x)^6$

Bibliografía

Algebra	Décima Edición	Rees, Sparks, Rees
Trigonometría	Segunda Edición	Frank Ayres Jr. y Robert E. Moyer
Algebra y Trigonometría	Segunda Edición	Dennis G. Zill y Jacqueline M. Dewar

Internet

<http://www.unlu.edu.ar/~dcb/matemat/combina2.htm>
http://mailweb.udlap.mx/~ccastane/Syllabus_Mat_Estadistica/Syllabus_Mat_Est.html
<http://personal5.iddeo.es/ztt/index.htm>
<http://chilemat.da.ru/>

VIRGINIO GOMEZ