

UNIVERSITE MOHAMMED SEDDIK BEN YAHIA -JIJEL
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE



RELATIVITE RESTREINTE

Polycopié de cours
Licence Physique Fondamentale

Ferkous Nourredine
Année 2017

Table des matières

1	La Relativité avant Einstein	4
1.1	Perspective historique	4
1.2	Référentiels galiléens et principe de relativité	5
1.3	Transformations de Galilée	6
1.4	L'électromagnétisme pose problème	8
1.5	Expérience de Michelson-Morley (1881-1887)	11
2	Cinématique Relativiste	14
2.1	Vitesse de propagation des interactions	14
2.2	Principe de la relativité d'Einstein	15
2.3	Transformations de Lorentz (TL)	16
2.4	Coïncidence, colocalité et simultanéité	18
2.5	Notion d'intervalle	20
2.6	Cône de lumière	21
2.7	Notion de Causalité	22
2.8	Dilatation des temps	23
2.9	Contraction des longueurs	24
2.10	Transformation des vitesses	25
2.11	Quelques effets optiques et théorie de la relativité	26
2.11.1	Aberration des étoiles	26
2.11.2	Effet Doppler	28
2.12	Quelques questions de compréhension	30
2.13	Exercices	31

3	Dynamique relativiste	34
3.1	Introduction	34
3.2	Notion de quadri-vecteur	34
3.2.1	Quadri-vitesse :	36
3.2.2	Quadri-vecteur accélération	37
3.2.3	Quadri-quantité de mouvement	38
3.3	Energie relativiste	38
3.3.1	Cas des particules de masse nulle	39
3.4	Relation fondamentale de la dynamique relativiste	41
3.5	Théorème de l'énergie cinétique	41
3.6	Conservation de la quadri-quantité de mouvement	42
3.7	Effet Compton	43
3.8	Référentiel du centre de masse	46
3.9	Collisions de particules	48
3.10	Energie de seuil d'une collision inélastique	49
3.11	Exercices	52
4	Electromagnétisme et relativité restreinte	56
4.1	Introduction	56
4.2	Rappel des lois de l'électromagnétisme dans le vide	57
4.3	Quadri-courant et quadri-potentiel	59
4.4	Formules de transformation des champs	59
4.4.1	Transformation du champ magnétique	60
4.4.2	Transformation du champ électrique	61
4.5	Formalisme tensoriel en relativité	62
4.6	Formulation covariante de l'électromagnétisme	65
4.6.1	Equations de propagation en notation covariante	65
4.6.2	Tenseur champ électromagnétique	67
4.6.3	Equations de Maxwell covariantes	68
4.7	Formulation lagrangienne de la relativité restreinte	69
4.7.1	Action relativiste pour une particule libre	69
4.7.2	Action relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	71

4.8	Incompatibilité de la relativité avec la théorie de la gravitation	76
4.9	Exercices	77

Chapitre 1

La Relativité avant Einstein

1.1 Perspective historique

Jusqu'à la fin du 19ème siècle, on croyait que les trois lois de Newton sur le mouvement et les idées associées sur les propriétés de l'espace et le temps ont fourni une base sur laquelle le mouvement de la matière pourrait être complètement compris. C'est grâce à ces lois que les physiciens dans le 18ème et 19ème siècles étaient capables de prédire les mouvements des planètes, les lunes, les comètes, les boulets de canon,...etc.

Dans la deuxième moitié du 19ème siècle, Maxwell a établi les équations, qui portent maintenant son nom, qui régissent le comportement de l'électricité et le magnétisme, la base de toute la technologie moderne. En particulier, ses équations prédisent que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ et établissent que la lumière est en fait une forme de rayonnement électromagnétique.

Contrairement à la mécanique de Newton, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par les transformations de Galilée. Ce résultat n'est pas en accord avec la conviction que les lois de la physique doivent être les mêmes dans tout référentiel inertiel. Cependant, l'onde électromagnétique se propage même dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de toute matière, ce qui conduisait les physiciens de cette époque de supposer qu'il existait un milieu non matériel, immobile, présent dans tout l'espace, et qui servirait de support aux vibrations lumineuses pour leur permettre de se propager, tout comme le son à travers l'air. Ils appelaient un tel milieu « *éther* » et considéraient que les équations de Maxwell n'étaient valables que dans un référentiel où l'éther est au repos.

Il était normal alors d'essayer de mettre en évidence, par l'expérience, l'existence de cet

éther, et en particulier les effets du mouvement du référentiel de l'observateur par rapport à l'éther. Dans cette direction une célèbre expérience a été réalisée appelée l'expérience de Michelson-Morley (1887) qui a tenté de mesurer la dépendance de la vitesse de la lumière sur la vitesse de l'observateur. Il est avéré que la vitesse de la lumière était toujours la même quel que soit le mouvement de l'observateur.

Une modification radicale des concepts, et par conséquent les équations de Newton eux-mêmes, a été nécessaire. Il était Albert Einstein (1905) qui, en combinant les résultats expérimentaux et les arguments physiques des autres avec ses propres points de vue, d'abord formulé les nouveaux principes en termes de laquelle l'espace et le temps sont indissociables. Ces principes, et leurs conséquences constituent la théorie de la relativité. Plus tard, Einstein a été en mesure de développer davantage cette théorie, conduisant à ce qui est connu comme la théorie de la relativité générale. Cette dernière théorie est essentiellement une théorie de la gravitation.

Nous nous intéressons dans ce cours uniquement à la théorie de la relativité restreinte c'est-à-dire aux cas où les différents observateurs sont en translation uniforme entre eux.

1.2 Référentiels galiléens et principe de relativité

Référentiels galiléens :

Définition : *Un référentiel galiléen est un référentiel où toute particule libre, sur laquelle aucune force n'agit, est au repos ou animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

Remarques :

- i) Les référentiels galiléens sont aussi appelés référentiels inertiels.
- ii) Dans un référentiel galiléen le temps est uniforme, l'espace est homogène et isotrope.

Pour un système isolé lié à un référentiel galiléen, on pourrait montrer qu'à l'uniformité du temps est associée la conservation de l'énergie, à l'homogénéité de l'espace est associée la conservation de la quantité de mouvement, et à l'isotropie de l'espace la conservation du moment cinétique.

iii) Tous les référentiels galiléens sont en mouvement de translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. Aucun de ces référentiels n'est absolu et aucun mouvement rectiligne uniforme ne peut être absolu. Il s'agit d'une idéalisation, la recherche d'un référentiel inertiel étant un sujet délicat, et sa détermination est toujours approximative.

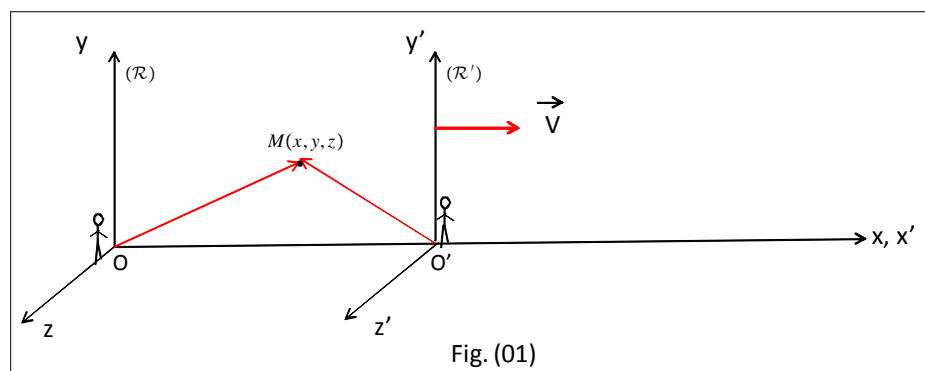
Principe de relativité :

Tous les référentiels galiléens sont équivalents et les lois fondamentales de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.

Cela signifie qu'une équation décrivant une certaine loi de la nature en fonction des coordonnées et du temps conserve sa forme mathématique dans différents référentiels d'inertie.

1.3 Transformations de Galilée

Soient deux référentiels inertiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') d'axes respectivement xyz et $x'y'z'$. Le référentiel (\mathcal{R}') est en translation uniforme par rapport à (\mathcal{R}) avec une vitesse \vec{V} suivant le sens positif des axes x et x' (voir Fig. 01). On suppose, pour simplifier, qu'à l'instant $t = t' = 0$ les origines des deux référentiels coïncident.



A l'instant t on a :

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{V}t . \quad (1.1)$$

Un point M dont les coordonnées sont x , y et z dans (\mathcal{R}) et x' , y' et z' dans (\mathcal{R}') . Son vecteur de position dans (\mathcal{R}) est :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} ,$$

et dans (\mathcal{R}') est :

$$\overrightarrow{O'M} = x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' , \quad (\vec{i}' = \vec{i} , \quad \vec{j}' = \vec{j} , \quad \vec{k}' = \vec{k}) .$$

On a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} .$$

Ainsi, on obtient les égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t. \end{array} \right. , \quad (1.2)$$

qu'on appelle *transformations de Galilée*. On obtient les formules réciproques donnant les coordonnées dans (\mathcal{R}) en fonction des coordonnées dans (\mathcal{R}') , en les permutant et en changeons V en $-V$. Ces transformations sont à la base de la cinématique newtonienne. Selon les transformations de Galilée, on note également les points suivants :

- (i) Le temps est un absolu (il est le même dans tous les référentiels d'inertie).
- (ii) Le concept de distance ou de longueur est aussi absolu ($\ell = \ell'$ comme le montre l'exemple ci-dessous).

Les lois de la nature doivent être invariantes (ont la même forme mathématique) par rapport aux lois de transformations, permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen.

Exemple 01 :

Utilisez les transformations de Galilée pour montrer que la distance mesurée est indépendante du référentiel.

Solution :

Soient (x'_1, y'_1, z'_1) et (x'_2, y'_2, z'_2) les coordonnées des deux points P_1 et P_2 respectivement à un instant t' ($= t$) par rapport à (\mathcal{R}') . La distance entre P_1 et P_2 comme observée dans (\mathcal{R}') est :

$$\begin{aligned} \ell' &= \left[(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\{x_2 - Vt - (x_1 - Vt)\}^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} , \end{aligned}$$

où on a utilisé les transformations de Galilée (1.2). Ainsi, on obtient :

$$\ell' = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2} = \ell ,$$

ℓ est la distance mesurée dans (\mathcal{R}) .

Exemple 02 :

Montrer l'invariance de la relation fondamentale de la dynamique par les transformations de Galilée.

Solution :

Soit un point M de coordonnées (x, y, z) relativement à un référentiel inertiel (\mathcal{R}) supposé fixe.

L'accélération de M dans (\mathcal{R}) est donc :

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

et dans un autre référentiel (\mathcal{R}') en translation uniforme avec une vitesse \vec{V} par rapport à (\mathcal{R}) , l'accélération de M est :

$$\vec{a}' = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt'^2} \right)_{\mathcal{R}'} = \ddot{x}' \vec{i}' + \ddot{y}' \vec{j}' + \ddot{z}' \vec{k}' .$$

Comme $\vec{V} = \text{cte}$ et $t = t'$ les transformations de Galilée (1.2) conduisent à l'invariance de l'accélération c-à-d : $\vec{a} = \vec{a}'$. La masse étant un invariant scalaire. L'invariance de l'accélération entraîne nécessairement celle de la force :

$$\vec{f} = m \vec{a} = m \vec{a}' = \vec{f}' \Rightarrow \text{Invariance de la force} \quad (1.3)$$

1.4 L'électromagnétisme pose problème

L'électromagnétisme repose sur les quatre équations de Maxwell suivantes

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Equation de Maxwell Gauss})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (\text{flux magnétique})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Equation de Maxwell Faraday})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Equation de Maxwell Ampère})$$

Chacune de ces équations prises individuellement décrit un effet physique (voir chapitre 4).

Le problème est que ces équations ne sont pas *toutes invariantes* par les transformations de Galilée. En effet, prenons, par exemple, l'équation de Maxwell Gauss dans le vide ($\rho = 0$) :

$$\text{div } \vec{E} = 0. \quad (1.4)$$

En premier lieu, voyons comment se transforment les champs électrique et magnétique par rapport aux transformations de Galilée. La force de Lorentz qui s'exerce sur une charge q , de

vitesse \vec{v} , par rapport à un référentiel inertiel (\mathcal{R}) est donnée par l'expression :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (1.5)$$

Pour un autre référentiel (\mathcal{R}') en translation uniforme par rapport à (\mathcal{R}), cette force s'écrit

$$\vec{F}' = q \left(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}' \right), \quad (1.6)$$

où on a supposé que la charge q est une quantité invariante (indépendante des référentiels). D'après le principe de la relativité, les deux référentiels sont équivalents. On doit avoir alors l'égalité $\vec{F} = \vec{F}'$; c-à-d

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'. \quad (1.7)$$

Comme (\mathcal{R}') est en translation uniforme par rapport à (\mathcal{R}) selon l'axe des x , on a d'après la loi de composition de vitesses :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \quad (1.8)$$

par conséquent :

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' + \vec{v}' \times \vec{B}',$$

la dernière équation est valable quelque soit la vitesse \vec{v} , on obtient alors les égalités :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}' \\ \text{et } \vec{B} = \vec{B}'. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Or, d'après (1.9), on a : $\vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}'$ ou explicitement :

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + V B'_z, \quad E_z = E'_z - V B'_y.$$

Trouvons maintenant les relations entre les dérivées partielles, à partir des transformations de Galilée :

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + V \frac{\partial B'_z}{\partial y'}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - V \frac{\partial B'_y}{\partial z'},$$

en ajoutant membre à membre ces trois équations, il vient :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}' \vec{E}' + V \left[\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right] = 0 .$$

La forme de l'équation $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ n'est donc pas invariante par changement de référentiel galiléen. En revanche, l'équation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ est invariante. En effet,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

D'après (1.9) on a :

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0,$$

c-à-d

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}' \vec{B}' = 0.$$

On déduit que les équations de Maxwell ne sont pas toutes invariantes par les transformations de Galilée.

Puisque l'électromagnétisme est aussi une théorie fondamentale comme la mécanique newtonienne, les physiciens ont été confrontés à un problème très sérieux. Ils avaient trois possibilités de choisir :

(i) La théorie électromagnétique (en particulier les équations de Maxwell) est erronée et doit être abandonnée.

(ii) Le principe de la relativité doit être abandonné.

(iii) Les concepts de l'espace absolu et du temps absolu sont inexacts et doivent être abandonnés.

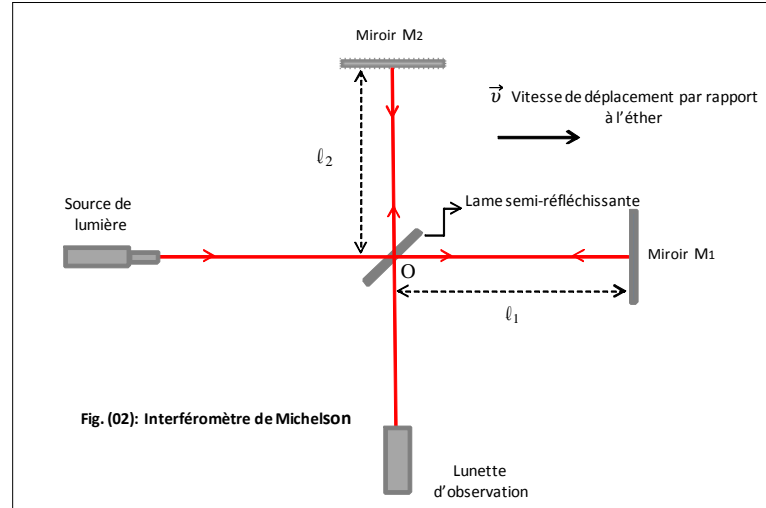
Le choix est extrêmement difficile à faire ?!

Le choix a été finalement fait par Einstein. Cependant, avant d'en arriver là, il est important de citer une expérience très remarquable dans l'histoire de la physique, qui a été conçue par Michelson pour mesurer la vitesse de la lumière dans son support supposé (l'éther) et en se basant sur la loi classique d'addition des vitesses.

1.5 Expérience de Michelson-Morley (1881-1887)

L'objectif de cette expérience était une tentative de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. Du fait qu'on supposait à l'époque que la vitesse de la lumière par rapport à un milieu hypothétique support de l'onde lumineuse, appelé l'éther, était égale à c . Pour cela, Michelson et Morley ont utilisé le mouvement de la Terre sur son orbite autour du Soleil dont la vitesse est de l'ordre de $v = 30 \text{ km/s}$.

L'interféromètre de Michelson est constitué d'une lame semi-réfléchissante séparant un faisceau lumineux en deux, et de deux miroirs M_1 et M_2 placés à des distances ℓ_1 et ℓ_2 (rep.) de la lame. Les deux faisceaux réfléchis sont recombinaés par la lame semi-réfléchissante et leur figure d'interférence est observée par une lunette d'observation (voir Fig. 02).



En supposant que l'interféromètre et l'observateur se déplacent avec la vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel lié à l'éther. Selon une vision classique, la vitesse de la lumière, qui est c par rapport à l'éther, serait $c - v$ par rapport à l'observateur pour la lumière qui se déplace de la lame vers le miroir M_1 et $c + v$ pour la lumière réfléchie du miroir M_1 vers la lame. Le temps total pris par le faisceau pour aller de O à M_1 puis de M_1 à O est :

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c - v} + \frac{\ell_1}{c + v} = \frac{2c\ell_1}{c^2 - v^2}. \quad (1.10)$$

Supposons t_2 est le temps total pris par le faisceau pour effectuer le trajet aller retour OM_2O . Le miroir M_2 se déplacera à la position M'_2 à travers une distance $M_2M'_2 = vt_2/2$ et

donc la distance parcourue par le faisceau est :

$$ct_2 = 2\sqrt{\ell_2^2 + \left(v\frac{t_2}{2}\right)^2}.$$

donc

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (1.11)$$

La différence de temps entre les deux faisceaux interférents est

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{\ell_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\ell_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right). \quad (1.12)$$

Si on tourne le dispositif de 90 degrés, les rôles des miroirs M_1 et M_2 se trouvent être échangés. La nouvelle différence de temps est la suivante :

$$t'_1 = t_2 \text{ et } t'_2 = t_1 \Rightarrow \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{\ell_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\ell_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (1.13)$$

puisque ℓ_1 et ℓ_2 changent de rôles. Les franges d'interférence seront différentes après rotation en raison de la différence de temps entre les chemins. Alors :

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c} \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\ell_2 + \ell_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Au premier ordre en $\frac{v^2}{c^2}$, cette différence est

$$\Delta t' - \Delta t \simeq \frac{(\ell_1 + \ell_2) v^2}{c^3}. \quad (1.14)$$

Si la période de vibration du faisceau lumineux est T , alors lorsque le dispositif est mis en rotation le décalage des franges (n) sera :

$$n = \frac{\Delta t' - \Delta t}{T} = \frac{(\ell_1 + \ell_2) v^2}{c^3 T}, \quad (1.15)$$

mais $cT = \lambda$ = la longueur d'onde donc on a

$$n = \frac{(\ell_1 + \ell_2) v^2}{c^2 \lambda}. \quad (1.16)$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad v = 3 \times 10^4 \text{ m/s}, \quad \ell_1 = \ell_2 = 11 \text{ m}, \quad \lambda = 550 \text{ nm}$$

$$n = 0,4. \quad (1.17)$$

Cela signifie que les franges se déplaceront de 0,4 frange lorsque le dispositif est tourné. Ce décalage serait très visible et donc parfaitement observable puisque la sensibilité de l'interféromètre permettait de détecter une variation de l'ordre de 0,01 frange. Mais l'expérience de Michelson-Morley n'a jamais permis une telle mesure : le résultat était toujours négatif.

Cette expérience a été répétée plusieurs fois, en utilisant des dispositifs toujours plus performants et dans des conditions très variées mais le résultat était toujours négatif. Un certain nombre de tentatives ont été faites pour expliquer le résultat nul de l'expérience de Michelson-Morley. Toutes ces tentatives présupèrent l'exactitude des transformations de Galilée. Cependant, ces tentatives se sont révélées être des échecs absolus et conduisent à des prédictions entrant en conflit avec des observations.

Signalons aussi que cette expérience a conduit à l'inutilité de l'éther et a aidé à admettre, comme on va le voir dans le chapitre suivant, le postulat d'Einstein qui suppose que la vitesse de la lumière est la même quelque soit l'état de mouvement relatif de la source et de l'observateur, autrement dit elle est la même par rapport à tous les référentiels galiléens.

Chapitre 2

Cinématique Relativiste

2.1 Vitesse de propagation des interactions

En mécanique de Newton les interactions entre particules sont décrites par une énergie potentielle qui ne dépend que des coordonnées de ces particules. Il s'ensuit que ces interactions se propagent de façon instantanée c'est-à-dire à vitesse infinie ; lorsqu'on varie la position d'une particule cela modifie d'une façon instantanée l'énergie potentielle, donc aussi les forces d'interactions. Mais l'expérience montre que les interactions instantanées n'existent pas dans la nature. Si on considère, par exemple, deux particules en interaction mutuelles l'une avec l'autre. Supposons que l'une des particules subit une certaine modification, cela ne se reflètera sur l'autre particule qu'au bout d'un certain intervalle de temps. Cette réalité physique nous oblige à définir une *vitesse de propagation des interactions* comme le rapport de la distance qui sépare ces deux particules par cet intervalle du temps. Cela revient à dire que la mécanique classique, dite aussi mécanique de Newton, fondée sur l'idée de la propagation instantanée des interactions est forcément entachée d'erreur.

Il est évident que l'existence d'une vitesse *maximale* de propagation des interactions signifie qu'aucune particule ne peut se déplacer avec une vitesse supérieure à cette vitesse maximale. Cette vitesse maximale représente, selon le principe de la relativité restreinte, la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, qui est une constante universelle, sa valeur numérique est $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

2.2 Principe de la relativité d'Einstein

Pendant que plusieurs physiciens étaient occupés à élaborer des théories et des explications pour le résultat nul de l'expérience de Michelson-Morley, c'est le génie d'Einstein qui a dévoilé la signification la plus profonde du principe de relativité. Einstein n'était pas pleinement conscient de l'expérience de Michelson-Morley et n'a pas tenté d'expliquer leur résultat nul. Il a été d'avis que toutes les lois de la physique devraient avoir la même forme dans tous les référentiels inertiels et a vu que cela n'est possible que si les transformations de Galilée sont remplacées (choix numéro (iii)) par des nouvelles transformations dans lesquelles l'espace et le temps ne sont pas absolus.

Einstein a supposé que la vitesse de la lumière devrait être constante dans toutes les directions par rapport à tous les observateurs inertiels. La vitesse de la lumière est alors la même le long des trajectoires longitudinales et transversales de l'interféromètre de Michelson et avec cette proposition, le résultat nul de l'expérience de Michelson-Morley est exactement comme prévu. Ainsi, la théorie de la relativité selon Einstein (qui fut énoncé en 1905) est basée sur les deux principes suivants :

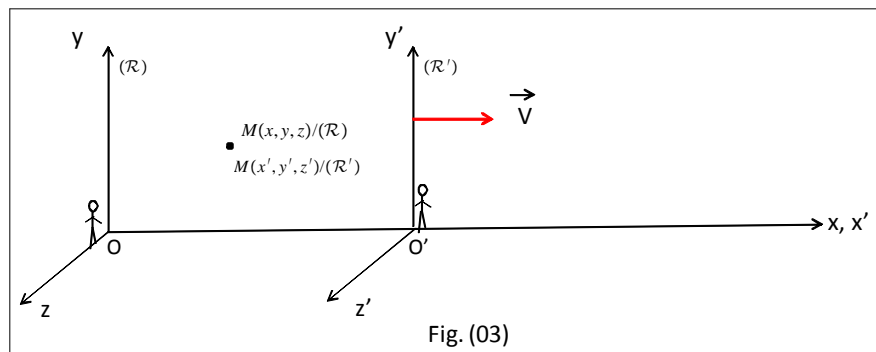
- (i) *Les lois fondamentales de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.*
- (ii) *La vitesse de la lumière est une constante universelle qui a la même valeur c dans tous les référentiels galiléens. Elle est donc indépendante du mouvement de la source et de la direction de propagation.*

La mécanique fondée sur ces deux principes est appelée *mécanique relativiste*.

On doit donc chercher une nouvelle loi de transformation des coordonnées d'espace et du temps compatible notamment avec le deuxième principe de relativité d'Einstein.

2.3 Transformations de Lorentz (TL)

Soient deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') le second étant animé d'une vitesse uniforme \vec{V} selon l'axe des x (voir Fig. (03)).



On cherche une transformation de la forme :

$$\begin{cases} x'_i = f_i(x, y, z, t), & x_i = x, y, z \\ t' = g(x, y, z, t). \end{cases} \quad (2.1)$$

i) Les transformations cherchées doivent être *linéaires*, si non on viole le principe d'inertie ; un corps au repos dans (\mathcal{R}) ne serait pas en mouvement uniforme dans (\mathcal{R}') . Par exemple si on pose : $x' = x - Vt + at^2$ et $t' = t$ on obtient $v'_x = v_x - V + 2at$ ainsi le dernier terme pose problème.

ii) Les coordonnées transverses (perpendiculaires) à la vitesse \vec{V} ne sont pas affectées par le changement de référentiel ;

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (2.2)$$

iii) On cherche des transformations sous la forme :

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \delta t \\ t' = \lambda x + \mu t \end{cases}, \quad (2.3)$$

où les coefficients γ , δ , λ et μ ne dépendent que de V . La vitesse v d'une particule dans (\mathcal{R}) se transforme comme :

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dx + \delta dt}{\lambda dx + \mu dt} = \frac{\gamma v + \delta}{\lambda v + \mu},$$

en particulier, l'origine O' de (\mathcal{R}') se déplace à la vitesse V par rapport à (\mathcal{R}) , soit :

$$0 = \frac{\gamma V + \delta}{\lambda V + \mu} \Rightarrow \delta = -\gamma V. \quad (2.4)$$

De même, une particule au repos dans (\mathcal{R}) a une vitesse $v' = -V$ mesurée dans (\mathcal{R}') , alors :

$$-V = \frac{\delta}{\mu} \Rightarrow \delta = -V\mu .$$

Ainsi, on a l'égalité $\gamma = \mu$. L'invariance de c donne :

$$\begin{aligned} c &= \frac{\gamma c + \delta}{\lambda c + \gamma} \Rightarrow \lambda c^2 + \gamma c = \gamma c + \delta \Rightarrow \lambda c^2 = \delta \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\delta}{c^2} = -\frac{\gamma V}{c^2} , \end{aligned}$$

les transformations s'écrivent alors comme suit :

$$x' = \gamma (x - Vt) \quad (2.5)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) . \quad (2.6)$$

Comme il n'y a pas de référentiel galiléen privilégié, on doit donc trouver la même relation, que l'on passe de (\mathcal{R}) à (\mathcal{R}') ou l'inverse, de (\mathcal{R}') à (\mathcal{R}) . C'est-à-dire, il suffit de changer V en $-V$;

$$x = \gamma (x' + Vt') \quad (2.7)$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) , \quad (2.8)$$

où on a posé $\gamma(V) = \gamma(-V)$ qui découle de l'isotropie de l'espace. Remplaçons (2.7) et (2.8) dans (2.5), il vient :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma^2 x' + \gamma^2 V t' - V \gamma^2 t' - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} x' \\ \Leftrightarrow 1 &= \gamma^2 - \gamma^2 \frac{V^2}{c^2} \\ \Leftrightarrow \gamma &= \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2} . \end{aligned}$$

Posons $\beta = V/c$ c-à-d : $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. On obtient ainsi les transformations suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma (ct - \beta x) , \end{cases}} \quad (2.9)$$

qu'on appelle transformations de Lorentz. Ces transformations s'écrivent aussi sous forme matricielle comme :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de Lorentz } L(V)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Notons pour les transformations de Lorentz :

- (i) L'espace et le temps ne sont pas indépendants.
- (ii) Le temps n'est pas un absolu.
- (iii) Lorsque $c \rightarrow +\infty$ (pas de vitesse limite), les transformations de Lorentz se réduisent aux transformations de Galilée.
- (iv) On obtient les formules réciproques donnant les coordonnées dans (\mathcal{R}) en fonction des coordonnées dans (\mathcal{R}') , en les permutant et en changeons V en $-V$.

Notons aussi que les équations de Maxwell sont *toutes invariantes* sous une transformation de Lorentz.

Définitions :

- On caractérise un *événement* par le lieu et le temps où il s'est produit. Ainsi un événement concernant un point matériel est défini par ces trois coordonnées d'espace de ce point et par l'instant où il a lieu.

- *L'espace-temps* : c'est une représentation mathématique de l'espace et du temps comme deux notions inséparables. Ainsi, c'est un espace à quatre dimensions : trois dimensions pour l'espace (x, y, z) et une pour le temps (t) . Pour que ces quatre grandeurs soient homogènes à une distance en multipliant le temps (t) par la constante (c) (la célérité de la lumière dans le vide). Un événement dans l'espace-temps (dit aussi espace de Minkowski) sera donc noté par (x, y, z, ct) .

- *Ligne d'univers* : On appelle ligne d'univers une trajectoire dans l'espace-temps.

2.4 Coïncidence, colocalité et simultanéité

Si deux événements se produisent au même endroit et en même temps, ils sont appelés événements *coïncidents*. Si deux événements se produisent au même endroit, mais pas nécessai-

rement en même temps, ils sont appelés événements *colocaux*. Si deux événements se produisent en même temps, mais pas nécessairement au même endroit, ils sont appelés événements *simultanés*.

Considérons dans (\mathcal{R}') deux événements $(x'_1, y'_1, z'_1, ct'_1)$ et $(x'_2, y'_2, z'_2, ct'_2)$.

(A) Événements coïncidents :

Si les deux événements précédents sont coïncidents dans un référentiel inertiel (\mathcal{R}') , alors $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$ de même $\Delta y' = \Delta z' = 0$ et aussi $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$. Dans le référentiel (\mathcal{R}) , les deux événements précédents sont décrits par (x_1, y_1, z_1, ct_1) et (x_2, y_2, z_2, ct_2) et d'après les transformations de Lorentz, on a : $\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(\Delta x' + V\Delta t') = 0$ et $\Delta y = \Delta z = 0$ et de même pour $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x') = 0$ alors les deux événements sont coïncidents dans (\mathcal{R}) aussi.

(B) Événements colocaux :

Si les deux événements précédents sont colocaux dans (\mathcal{R}') , alors $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ mais $\Delta t' = t'_2 - t'_1 \neq 0$. Dans (\mathcal{R}) , on a :

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = \gamma(\Delta x' + V\Delta t') = \gamma V\Delta t' \\ \Delta y &= \Delta z = 0 \\ \Delta t &= t_2 - t_1 = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'\right) = \gamma\Delta t' .\end{aligned}$$

On voit que les deux événements qui se sont produits au même point dans (\mathcal{R}') , ne se produisent pas au même point dans (\mathcal{R}) . L'égalité $\Delta t = \gamma\Delta t'$ c'est juste *la dilatation des temps*. Pour les transformations de Galilée ($c \rightarrow +\infty$) on a $\Delta t = \Delta t'$.

(C) Événements simultanés :

Si les deux événements précédents sont simultanés dans (\mathcal{R}') , alors $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0$ mais $\Delta x' = x'_2 - x'_1 \neq 0$ et supposons que $\Delta y' = \Delta z' = 0$. Dans (\mathcal{R}) , on a :

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_2 - x_1 = \gamma(\Delta x' + V\Delta t') = \gamma\Delta x' \\ \Delta y &= \Delta z = 0 \\ \Delta t &= t_2 - t_1 = \gamma\left(\Delta t' + \frac{\beta}{c}\Delta x'\right) = \gamma\frac{\beta}{c}\Delta x' \neq 0,\end{aligned}$$

les événements simultanés dans un certain système de référence ne le sont pas dans un autre système. Pour la mécanique classique basée sur la transformation de Galilée ($c \rightarrow +\infty$) si $\Delta t' = 0$ on a toujours $\Delta t = 0$, autrement dit on perd la simultanéité en mécanique relativiste.

2.5 Notion d'intervalle

Soient (x_1, y_1, z_1, ct_1) et (x_2, y_2, z_2, ct_2) sont les coordonnées de l'espace-temps de deux événements quelconques, la quantité Δs dont le carré est défini par :

$$\boxed{\Delta s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.11)$$

est appelée *intervalle* entre ces deux événements.

Exercice :

Montrer que Δs^2 est un invariant relativiste par rapport aux transformations de Lorentz, c'est-à-dire :

$$\boxed{\Delta s^2 = \Delta s'^2} \quad (2.12)$$

Solution :

L'intervalle entre ces deux événements par rapport à (\mathcal{R}) est :

$$\Delta s^2 = [c(t_2 - t_1)]^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

utilisons la transformation de Lorentz inverse, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \{\gamma(ct'_2 + \beta x'_2) - \gamma(ct'_1 + \beta x'_1)\}^2 - \{\gamma(x'_2 + \beta ct'_2) - \gamma(x'_1 + \beta ct'_1)\}^2 \\ &\quad - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= \{\gamma c(t'_2 - t'_1) + \gamma\beta(x'_2 - x'_1)\}^2 - \{\gamma\beta c(t'_2 - t'_1) + \gamma(x'_2 - x'_1)\}^2 \\ &\quad - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= \gamma^2 c^2 (t'_2 - t'_1)^2 + \gamma^2 \beta^2 (x'_2 - x'_1)^2 + 2\gamma^2 c(t'_2 - t'_1)\beta(x'_2 - x'_1) \\ &\quad - \gamma^2 \beta^2 c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - \gamma^2 (x'_2 - x'_1)^2 - 2\gamma^2 \beta c(t'_2 - t'_1)(x'_2 - x'_1) \\ &\quad - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) (x'_2 - x'_1)^2 \\ &\quad - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \end{aligned}$$

mais $\gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 \\ &= \Delta s'^2 \\ &\Rightarrow \Delta s^2 \text{ est un invariant.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notons aussi que l'intervalle Δs^2 peut être positif, négatif ou nul.

i) Si $\Delta s^2 > 0$ l'intervalle est dite de *genre temps*. Dans ce cas, deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant à une vitesse inférieure à c . Il peut donc y avoir un lien de *causalité* entre eux.

ii) Si $\Delta s^2 = 0$ l'intervalle est dite de *genre lumière*. Dans ce cas, deux événements ne peuvent être joints que par un signal allant à la vitesse de la lumière.

iii) Si $\Delta s^2 < 0$ l'intervalle est dite de *genre espace*. Cette fois ci, il ne peut pas y avoir de lien causal entre les deux événements.

Lorsque deux événements sont infiniment proches l'un de l'autre l'intervalle ds entre ces événements s'écrit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.14)$$

2.6 Cône de lumière

Pour simplifier, nous considérons qu'une seule coordonnée spatiale et le temps. Un événement spécifié par (x, ct) est juste un point dans le diagramme (xct) . Soit une particule mobile de vitesse $v < c$, passe par l'origine O à $t = 0$ d'équation de mouvement $x = vt$. Sa position sera donc caractérisée par la condition $|x| < c|t|$. Les deux droites (AA') et (BB') d'équations respectives $x = ct$ et $x = -ct$ sont associées aux trajectoires des rayons lumineux issus de O .

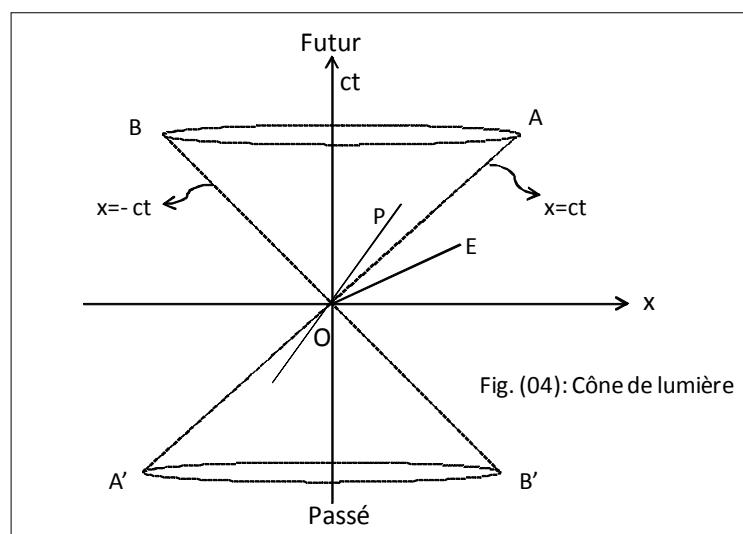
Considérons les deux événements $O(0, 0)$ et $P(x, ct)$ dans le secteur $A'OA$ du diagramme (Fig. 04). L'intervalle entre ces deux événements est de genre temps puisque $(c^2 dt^2 - dx^2)$ est positif. Dans ce secteur t est positif, alors l'événement P se produit après l'événement O . Comme l'intervalle doit être de genre temps dans tous les référentiels inertiels, donc il n'y a pas de référentiel inertiel dans lequel l'événement P se produit avant l'événement O . En d'autres termes, tous les événements représentés par des points dans le secteur $A'OA$ sont absolument au futur par rapport à l'événement $O(0, 0)$.

Pour le secteur BOB' , l'intervalle entre $O(0, 0)$ et $P'(x, ct)$ est aussi de genre temps. Dans ce secteur t est négatif, l'événement P' se produit avant l'événement O . Par conséquent, tous les événements du secteur BOB' sont dans le passé par rapport l'événement O .

Considérons maintenant un événement E dans le secteur AOB' . La ligne OE n'est pas une ligne d'univers possible pour toute particule puisqu'elle ne peut pas voyager plus vite que la lumière.

Le diagramme (xct) peut être étendu en ajoutant une autre dimension, à savoir y d'axe Oy perpendiculaire au plan (xct) . Les lignes d'univers des signaux lumineux issus de O génèrent maintenant un cône dont l'équation est $x^2 + y^2 = c^2t^2$. Ce cône divise l'espace-temps (x, y, ct) en trois catégories : le passé de O , le futur de O et l'ailleurs.

Dans le cas le plus général, nous devons imaginer un espace à quatre dimensions (hyperespace) (x, y, z, ct) où l'hypercône de lumière est maintenant définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.



2.7 Notion de Causalité

Deux événements physiques sont dits liés causalement si un événement est l'effet d'un autre événement précédent qui le provoque (cause). La condition nécessaire pour que deux événements soient causalement liés est que l'événement "effet" doit se produire plus tard que l'événement "cause". Maintenant, si deux événements sont causalement liés dans un référentiel inertiel, alors, par le principe de la relativité, ils doivent être causalement liés dans tous les référentiels inertiels. Sinon, nous pourrions distinguer entre ces référentiels inertiels si deux événements sont causalement liés ou non.

Par exemple, supposons que les deux événements $E_1(0,0,0,0)$ et $E_2(0,0,0,t > 0)$ sont causalement liés dans un référentiel inertiel. Alors l'intervalle entre ces événements $\Delta s^2 = c^2t^2 > 0$ est de genre temps. Etant donné que Δs^2 a la même valeur dans tous les référentiels inertiels, il s'ensuit que l'intervalle entre deux événements liés causalement doit être de genre temps. Ainsi, l'événement O de la figure (04) ne peut être que la cause d'événements qui sont à son futur.

De plus, O peut seulement être l'effet des événements qui ont été dans le passé. Ainsi, dans tous les référentiels inertiels, les causes précèdent toujours leurs effets. C'est le principe de la causalité.

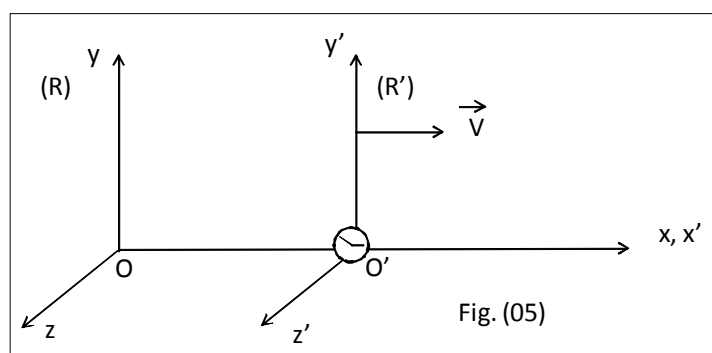
D'autre part, l'intervalle entre les événements E et O de la figure (04) est de genre espace et donc ces deux événements ne peuvent pas être causalement liés du fait qu'il est impossible de bien définir dans tous référentiels inertiels le concept d'effet et cause pour ces deux événements.

2.8 Dilatation des temps

Définition : *L'intervalle de temps propre est l'intervalle de temps qui sépare deux indications d'une même horloge dans le référentiel où elle est au repos.*

Soit une horloge fixe liée à un référentiel inertiel que l'on appellera référentiel propre de l'horloge (\mathcal{R}'), on suppose que cette horloge est placée à l'origine des coordonnées pour simplifier. Notons $\Delta t'$ l'intervalle de temps propre dans (\mathcal{R}').

On suppose maintenant que cette horloge est en translation uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen (\mathcal{R}) selon l'axe des x avec une vitesse \vec{V} (voir Fig. (05)). Quel est l'intervalle de temps Δt correspondant dans (\mathcal{R}) ?



Soit la transformation de Lorentz inverse :

$$ct = \gamma (ct' + \beta x') , \quad (2.15)$$

où le facteur $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$. L'horloge étant placée en $x' = 0$, Il vient :

$$t = \gamma t' . \quad (2.16)$$

Le temps entre deux événements dans (\mathcal{R}') est $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ (intervalle de temps propre), alors dans (\mathcal{R}) on a :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) ,$$

c-à-d :

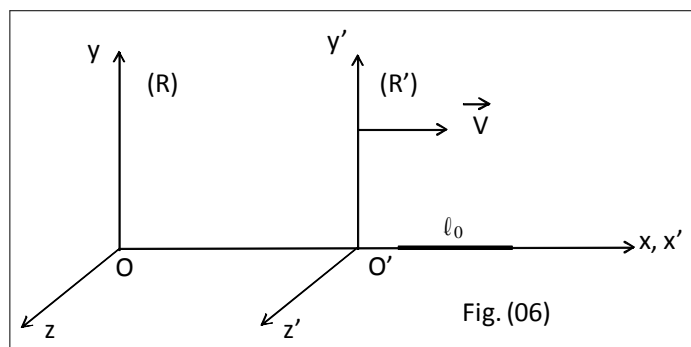
$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' ,} \quad (2.17)$$

et puisque $\gamma > 1$ alors $\Delta t > \Delta t'$. On en déduit que l'intervalle de temps correspondant Δt , mesuré dans (\mathcal{R}) , est toujours supérieur à l'intervalle de temps propre $\Delta t'$. C'est la dilatation des temps.

2.9 Contraction des longueurs

Définition : On appelle longueur propre d'un objet, la longueur de cet objet mesurée dans le référentiel où il est immobile.

Soient deux référentiels inertiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') d'axes respectivement xyz et $x'y'z'$. Le référentiel (\mathcal{R}') est en translation uniforme par rapport à (\mathcal{R}) avec une vitesse \vec{V} suivant le sens positif des axes x et x' (voir Fig. (06)).



Soit une tige fixe dans (\mathcal{R}') de longueur propre ℓ_0 (longueur mesurée dans (\mathcal{R}')), donc :

$$\ell_0 = x'_2 - x'_1, \quad (2.18)$$

sa longueur mesurée dans (\mathcal{R}) est donnée par

$$\ell = x_2 - x_1 . \quad (2.19)$$

Nous mesurons les coordonnées des deux extrémités x_2 et x_1 de la tige dans (\mathcal{R}) en même temps t . La relation entre ℓ_0 et ℓ peut être trouvée au moyen de la transformation de Lorentz

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma (x_2 - Vt) \\ x'_1 = \gamma (x_1 - Vt) \end{cases} , \quad (2.20)$$

faisons la soustraction, il vient

$$\ell_0 = \gamma \ell,$$

comme $\gamma > 1$, alors

$$\ell = \frac{\ell_0}{\gamma} < \ell_0. \quad (2.21)$$

Ainsi, la longueur de la tige telle que mesurée dans (\mathcal{R}) est plus courte que sa la longueur mesurée dans (\mathcal{R}') où cette tige est stationnaire. C'est la contraction des longueurs.

2.10 Transformation des vitesses

On va établir maintenant les formules permettant de calculer la vitesse d'une particule matérielle dans un référentiel donné connaissant sa vitesse dans un autre référentiel. Supposons à nouveau que le référentiel (\mathcal{R}') est en translation uniforme par rapport à (\mathcal{R}) avec une vitesse \vec{V} suivant le sens positif des axes x . Soit $v_x = dx/dt$ la composante de la vitesse dans (\mathcal{R}) et $v'_x = dx'/dt'$ sa composante dans (\mathcal{R}') . Il vient de la transformation de Lorentz :

$$dx' = \gamma (dx - V dt) \quad (2.22)$$

$$dy' = dy \quad (2.23)$$

$$dz' = dz \quad (2.24)$$

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right), \quad (2.25)$$

divisons les trois équations (2.22), (2.23) et (2.24) par (2.25) et remarquons que :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'},$$

où \vec{r} et \vec{r}' les vecteurs de positions dans (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') respectivement, il vient

$$v'_x = \frac{dx - V dt}{dt - \frac{V}{c^2} dx}, \quad v'_y = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)}, \quad v'_z = \frac{dz}{\gamma \left(dt - \frac{V}{c^2} dx \right)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x \right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x \right)},}$$

qui sont les formules de transformation des vitesses. A la limite $c \rightarrow \infty$, ces formules se réduisent aux formules de la composition des vitesses de la mécanique classique ;

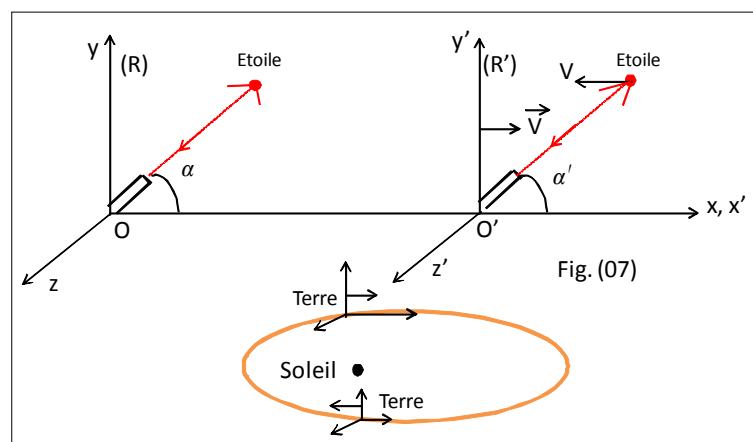
$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

2.11 Quelques effets optiques et théorie de la relativité

2.11.1 Aberration des étoiles

L'aberration est la variation apparente de la position d'un corps céleste tel qu'une étoile, en raison du mouvement de l'observateur avec la Terre.

Considérons une étoile au repos dans un référentiel (\mathcal{R}) (voir Fig. (07)). Un télescope, attaché à (\mathcal{R}) , voit cette étoile inclinée par rapport à l'axe x d'angle α . Soit V la vitesse de la Terre suivant la direction x par rapport à (\mathcal{R}) . Dans le référentiel (\mathcal{R}') , attaché à la Terre, le télescope voit l'étoile inclinée d'angle α' par rapport à l'axe x' . α'



Dans (\mathcal{R}) , le vecteur \overrightarrow{SO} a les composantes vitesses

$$v_x = -c \cos \alpha, \quad v_y = -c \sin \alpha, \quad v_z = 0,$$

soit

$$\tan \alpha' = \frac{v'_y}{v'_x}, \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

Selon les formules de transformation des vitesses :

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)},$$

$\tan \alpha'$ s'écrit donc comme

$$\tan \alpha' = \frac{v_y}{\gamma (v_x - V)},$$

alors

$$\tan \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \tan \alpha}{1 + \beta (\cos \alpha)^{-1}} < \tan \alpha.$$

Six mois plus tard, la vitesse de la Terre autour du soleil est dirigée de manière opposée, c'est-à-dire le référentiel (\mathcal{R}') a une vitesse $-V$ par rapport à (\mathcal{R}) . On obtient ainsi en changeant seulement dans la formule précédente V par $(-V)$:

$$\tan \alpha'' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \tan \alpha}{1 - \beta (\cos \alpha)^{-1}}.$$

Donc $\alpha'' \neq \alpha'$, cela signifie que l'inclinaison du télescope doit être modifiée pour garder l'étoile dans le champ de vision.

Faisons maintenant quelques approximations. Comme

$$\beta = \frac{V}{c} \simeq \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 10^{-4} \ll 1 ,$$

on obtient au premier ordre en β :

$$\tan \alpha' = \tan \alpha - \frac{\beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}. \quad (2.26)$$

Posons $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha \ll 1$ donc :

$$\begin{aligned} \tan \alpha' &= \tan (\alpha + \Delta\alpha) \\ \tan \alpha' &\simeq \tan (\alpha) + \Delta\alpha \frac{d}{d\alpha} \tan (\alpha) \quad (\text{série de Taylor}) \\ \tan \alpha' &= \tan (\alpha) + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha} , \end{aligned} \quad (2.27)$$

comparons les équations (2.26) et (2.27), on voit que :

$$\Delta\alpha = -\beta \sin \alpha ,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha' = \alpha - \beta \sin \alpha \Rightarrow \alpha' < \alpha.$$

De même, on peut montrer que six mois plus tard, on a :

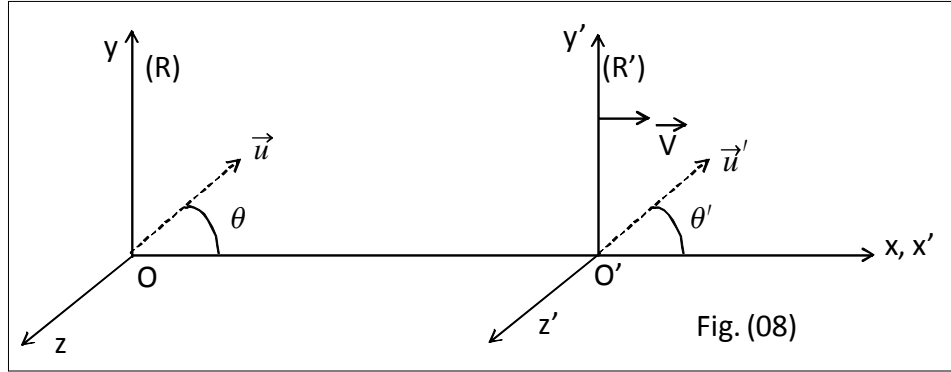
$$\alpha'' = \alpha + \beta \sin \alpha \Rightarrow \alpha'' > \alpha.$$

Ainsi, en raison du mouvement de la Terre autour du soleil, l'inclinaison du télescope doit être changée entre les limites données par α' et α'' afin que l'étoile reste dans le champ de vision tout au long de l'année.

2.11.2 Effet Doppler

Soient deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , le second étant animé d'une vitesse uniforme \vec{V} selon l'axe des x (voir figure (08)). Les horloges dans les deux référentiels sont mises à zéro à l'instant où les origines O et O' coïncident ;

$$x' = x = 0, y' = y = 0, z' = z = 0 \text{ et } t' = t = 0. \quad (2.28)$$



Une source monochromatique, fixe dans le référentiel (\mathcal{R}') au point O' , émet une onde lumineuse plane, de fréquence ν' , dans la direction \vec{u}' du plan $x'O'y'$ faisant un angle θ' avec l'axe x' . La propagation de la lumière peut être décrite par les observateurs dans (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') respectivement par :

$$\begin{aligned} \psi &= Ae^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \psi' &= Ae^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r}' - \omega' t')} , \end{aligned}$$

où \vec{r} vecteur de position, $\vec{k} = k\vec{u}$ vecteur d'onde de module $k = \omega/c$ dirigé dans le sens de propagation de l'onde de célérité c . La phase $(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ doit être invariante dans un changement de référentiel galiléen ; c'est-à-dire :

$$\omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{r}' = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} , \quad (2.29)$$

sinon les conditions initiales (2.28) ne seront pas satisfaites. L'égalité (2.29) s'écrit aussi comme suit :

$$\omega' t' - (k' \cos \theta') x' - (k' \sin \theta') y' = \omega t - (k \cos \theta) x - (k \sin \theta) y , \quad (2.30)$$

rappelons les TL :

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - \beta ct) , & y' = y , & z' = z \\ ct' = \gamma (ct - \beta x) , \end{cases}$$

introduisons ces transformations dans (2.30), on obtient :

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(ct - \beta x) - (k' \cos \theta')\gamma(x - \beta ct) - (k' \sin \theta')y = \omega t - (k \cos \theta)x - (k \sin \theta)y ,$$

réécrivons cela de la manière suivante :

$$\left(\frac{\omega'}{c}\gamma - \frac{\omega}{c} + \gamma k' \cos \theta' \beta\right)ct + \left(k \cos \theta - \gamma k' \cos \theta' - \frac{\omega'}{c}\gamma \beta\right)x + (k \sin \theta - k' \sin \theta')y = 0.$$

Cette égalité doit être satisfaite pour tout x, y, z et t . On obtient ainsi les équations :

$$\frac{\omega'}{c}\gamma = \frac{\omega}{c} - \gamma k' \cos \theta' \beta \quad (2.31)$$

$$\frac{\omega'}{c}\gamma \beta = k \cos \theta - \gamma k' \cos \theta' \quad (2.32)$$

$$k \sin \theta = k' \sin \theta'. \quad (2.33)$$

Multiplions l'équation (2.32) par β puis faisons la différence de (2.31) et (2.32) :

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(1 - \beta^2) = \frac{\omega}{c} - \beta k \cos \theta ,$$

mais $k = \omega/c$ il vient :

$$\omega' = \omega \frac{(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.34)$$

comme $\omega = 2\pi\nu$, où ν est la fréquence du signal, on a donc le résultat :

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.35)$$

qui est la formule de l'effet Doppler relativiste. De plus les équation (2.33) et (2.34) donnent :

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (2.36)$$

Notons les points suivants :

i) comme $\nu \neq \nu'$ alors d'après (2.33) $\theta \neq \theta'$. Pour l'observateur en mouvement par rapport à la source, il y a donc en général modification de la fréquence (donc de la longueur d'onde) et modification de la direction de l'onde.

ii) Si le signal se propage suivant $Ox // \vec{V} \Rightarrow \theta = 0$ et donc d'après (2.35) :

$$\nu' = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}\nu \Rightarrow \nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\nu ,$$

et d'après (2.36) on a : $\cos \theta' = 1 \Rightarrow \theta' = 0$. Donc dans ce cas il n'y a pas de changement de direction de l'onde. Mais :

a) Il y a augmentation de la fréquence $\nu' > \nu$ si $\beta < 0$ c-à-d si l'observateur se rapproche de la source.

b) Il y a diminution de la fréquence $\nu' < \nu$ si $\beta > 0$ c-à-d si l'observateur s'éloigne de la source.

c'est l'effet Doppler longitudinal.

iii) Si l'onde lumineuse se propage suivant $Oy \perp \vec{V} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ et donc d'après (2.35) :

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

et (2.36) donne : $\cos \theta' = -\beta$, il y a donc changement de direction de l'onde et augmentation de fréquence ($\nu' > \nu$) que l'observateur s'éloigne ou se rapproche de la source, c'est l'effet Doppler transversal. Cet effet supplémentaire n'est pas possible selon la théorie classique. Ceci est essentiellement dû à la dilatation du temps.

2.12 Quelques questions de compréhension

Q 1 : Pourquoi la notion d'éther a été introduite ? Pourquoi pensez-vous que ce concept est absurde ?

Q 2 : Quelle est la signification du résultat nul de l'expérience de Michelson-Morley ? Est-ce que cela réfute l'existence de l'éther ? Expliquer.

Q 3 : Quelles sont les deux principes de la relativité d'Einstein ?

Q 4 : La lumière a-t-elle besoin d'un support matériel pour se propager ?

Q 5 : Que comprenez-vous par contraction de l'espace ?

Q 6 : Ecrire la loi relativiste de composition des vitesses et expliquez quelles conclusions importantes en découlent.

Q 7 : Qu'entendez-vous par réciprocity entre deux référentiels inertiels en mouvement relatif en ce qui concerne la contraction de l'espace et la dilatation du temps.

Q 8 : Quelle est la vitesse d'un mètre si sa longueur observée par un observateur est 0,99 m ?

2.13 Exercices

Exercice 01 :

Il faut 10^5 années pour que la lumière nous atteigne de la partie la plus éloignée de notre galaxie. Est-il possible pour un homme de parcourir cette partie de notre galaxie à une vitesse constante dans un délai raisonnable, disons 10^5 années

Exercice 02 :

Deux signaux lumineux se propagent dans la direction positive le long de l'axe des x d'un référentiel (\mathcal{R}) , la distance qui sépare ces deux signaux est d . Quelle est leur distance de séparation vue à partir du référentiel (\mathcal{R}') qui se déplace par rapport à (\mathcal{R}) avec une vitesse V le long de l'axe x positif ?

Exercice 03 :

Deux vaisseaux spatiaux A et B se déplacent à droite et à gauche avec des vitesses de $0,8c$ et $0,6c$ respectivement observées par un observateur sur terre. (i) Quelle est leur vitesse relative jugée par l'observateur sur terre ?

(ii) Quelle est la vitesse du vaisseau A par rapport à B ?

Exercice 04 :

Montrer que deux TL correspondantes aux vitesses V_1 et V_2 sont équivalentes à une seule TL correspondante à la vitesse $V = (V_1 + V_2) / (1 + V_1 V_2 / c^2)$.

Exercice 05 : (*Les deux jumeaux*)

Ali et Omar sont deux jumeaux. A l'âge de 20 ans Omar décide d'effectuer un voyage dans l'espace à bord d'une fusée qui se déplace à une vitesse constante $V = 0,97c$. Il quitte son frère, se déplace en ligne droite, effectue un demi tour, et revient sur terre. Il trouve Ali âgé de 30 ans. Quel est l'âge d'Omar ?

On négligera les phases d'accélération et de décélération de la fusée.

Exercice 06 : (*Différents événements dans l'expérience de Michelson-Morley*)

Soit le référentiel (\mathcal{R}') : $O'x'y'z'$, dans lequel sont fixés une source de lumière S située en O' et les miroirs M_1 et M_2 placés sur les axes $O'x'$ et $O'y'$ à la même distance $\ell = 3m$ de S (voir figure). On suppose que (\mathcal{R}') est galiléen et se déplace à la vitesse $V = 10^{-4}c$, par rapport à un référentiel fixe (\mathcal{R}) : $Oxyz$. On considère les cinq événements suivants :

E_0 est l'émission du signal lumineux vers M_1 et M_2 .

E_1 est l'arrivée du signal sur M_1 .

E_2 est l'arrivée du signal sur M_2 .

E_3 est le retour en S du signal réfléchi par M_1

E_4 est le retour en S du signal réfléchi par M_2

1) Sachant qu'à l'instant initial les origines O et O' de (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') coïncident, écrire, en fonction de ℓ , $\beta = V/c$ et γ , les coordonnées spatio-temporelles de ces événements.

2) Quels sont les carrés des intervalles entre E_0 et E_1 , entre E_0 et E_2 , entre E_1 et E_2 , entre E_3 et E_4 .

3) Les événements E_1 et E_2 sont-ils simultanés, dans (\mathcal{R}) , dans (\mathcal{R}') ? Même question pour les événements E_3 et E_4 . Préciser par un calcul numérique. Commenter.

Exercice 07 : (*Masse volumique et forme apparente d'une sphère*)

Un objet sphérique homogène, de centre O' , de rayon a , de masse volumique ρ_0 (mesurée dans son référentiel propre (\mathcal{R}') : $O'x'y'z'$), est animée dans l'espace d'un mouvement uniforme de vitesse \vec{V} , parallèlement à l'axe Ox , par rapport au référentiel terrestre (\mathcal{R}) : $Oxyz$. Déterminer pour l'observateur terrestre :

- 1) la forme apparente de cet objet à chaque instant t ,
- 2) la masse volumique de cet objet.
- 3) l'équation de l'objet, à l'instant $t' = 0$ de (\mathcal{R}') .

Retrouver directement ce résultat à partir de l'invariance de l'intervalle.

Exercice 08 : (*Contraction et rotation*)

Une tige de longueur propre ℓ_0 se déplace avec une vitesse constante \vec{V} dans le sens horizontal. La tige fait un angle θ_0 avec l'axe x' (mesuré dans son référentiel propre (\mathcal{R}') : $O'x'y'z'$).

- 1) Déterminer la longueur de la tige, telle que mesurée par un observateur fixe.
- 2) Déterminer l'angle θ que la tige forme avec l'axe x (mesuré dans le repère fixe (\mathcal{R}) : $Oxyz$)

Exercice 09 : (*Transformation des vitesses et invariance de c*)

Le référentiel (\mathcal{R}) est animé par rapport à (\mathcal{R}') d'un mouvement de translation uniforme de vitesse \vec{V} parallèle à Ox . Les origines O et O' des deux référentiels coïncident à l'origine des temps $t = t' = 0$. Une particule matérielle M est animée de la vitesse \vec{v} dans (\mathcal{R}) et \vec{v}' dans (\mathcal{R}') . La vitesse \vec{v}' (ou \vec{v}) peut être considérée comme la résultante d'une composante $\vec{v}'_{//}$ parallèle à \vec{V} et d'une composante \vec{v}'_{\perp} perpendiculaire à \vec{V} .

- 1) Exprimer $\vec{v}'_{//}$ et \vec{v}'_{\perp} en fonction de \vec{V} , \vec{v} et de $\vec{v}_{//}$ et \vec{v}_{\perp} respectivement.
- 2) On désigne par θ et θ' les angles que font respectivement \vec{v} et \vec{v}' avec la vitesse \vec{V} de

translation de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) . Exprimer $\text{tg}(\theta')$ en fonction de V , v et θ . Dans le cas d'un photon, exprimer $\text{tg}(\theta')$ en fonction de θ et $\beta = V/c$.

3) La particule se déplace dans (\mathcal{R}) parallèlement à Ox . Etablir la relation :

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V \cdot v}{c^2}\right)^2}.$$

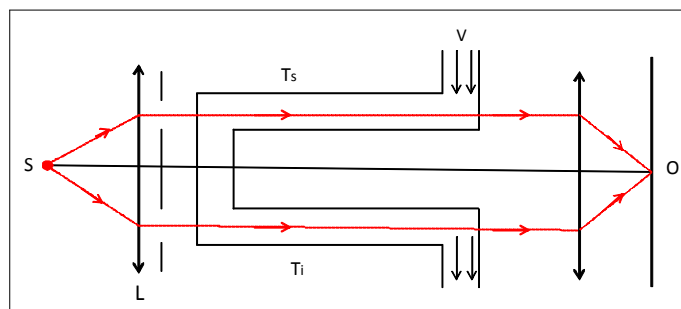
Retrouver ainsi l'invariance de la célérité de la lumière dans le vide.

Exercice 10 : (*Expérience de Fizeau*)

On considère le dispositif interférentiel représenté ci-dessous, éclairé par une source lumineuse S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,589 \mu$, placée au foyer de la lentille L . Lorsque le liquide d'indice $n = 1,629$ est au repos dans les tubes T_s et T_i de même longueur $\ell = 2m$, on observe en O à l'aide d'un oculaire, une frange centrale brillante. Le liquide est mis en circulation jusqu'à atteindre la vitesse constante sur l'axe des tubes $V = 10 \text{ m/s}$.

a) Déterminer, par rapport à l'observateur, les vitesses respectives v_s et v_I de la lumière dans le tube supérieur T_s et dans le tube inférieur T_i , en tenant compte du fait que $V \ll c$.

b) De combien d'interfranges devrait se déplacer la frange centrale ? Ce résultat est-il prévisible dans le cadre de la cinématique classique ?



Chapitre 3

Dynamique relativiste

3.1 Introduction

Compte tenu de la relativité de l'espace et du temps, il est impératif de réexaminer plusieurs concepts tels que la masse et l'impulsion. Ainsi, en se basant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste, nous allons voir quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte sur ces concepts par rapport au traitement de la dynamique de Newton.

3.2 Notion de quadri-vecteur

On peut considérer l'ensemble des coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement comme les composantes d'un rayon vecteur quadri-dimensionnel (*4-vecteur de position*) dans un espace quadri-dimensionnel. Si on note x^α , $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ces composantes avec

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

on écrit alors le 4-vecteur de position :

$$\underline{r} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}) ,$$

où \vec{r} est le vecteur de position ordinaire, Le carré du 4-vecteur est donné par l'expression

$$\begin{aligned} (\underline{r})^2 &= (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \vec{r}^2, \end{aligned}$$

qui est une quantité invariante par transformation de Lorentz.

Définition : On général, on appelle quadri-vecteur \underline{A} un objet mathématique défini dans l'espace de Minkowski par quatre composantes A^0, A^1, A^2, A^3 qui se transforment selon la transformation de Lorentz de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma (A^0 - \beta A^1), \\ A'^1 &= \gamma (A^1 - \beta A^0), \\ A'^2 &= A^2, \\ A'^3 &= A^3, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\underline{A}' = L \underline{A}$$

où L est la matrice de Lorentz. Le carré est

$$(\underline{A})^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit deux types de composantes des quadivecteurs, qu'on désigne par les lettres A^α et A_α (indices placés en haut et en bas). On doit ainsi tenir compte des égalités suivantes :

$$A^0 = A_0, \quad A_i = -A^i, \quad i = 1, 2, 3$$

Les composantes A^α (indice en haut) sont dites composantes *contravariantes* et les quantités A_α (indice en bas) composantes *covariantes*. Le carré $(\underline{A})^2$ peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} (\underline{A})^2 &= \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha A_\alpha = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 \\ &= (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \\ &= (A^0)^2 - (\vec{A})^2. \end{aligned}$$

Convention : On désigne généralement la somme précédente par

$$\sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha A_\alpha = A^\alpha A_\alpha.$$

Le signe de sommation étant omis. Cela correspond à la règle générale selon laquelle la répétition d'un indice dans une expression sous-entend une sommation. Attention ! : on n'applique la convention de sommation qu'entre une paire d'indices dont l'un est covariant et l'autre contravariant.

On définit d'une façon analogue le produit scalaire de deux quadri-vecteurs ou les composantes sont

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} A^0 \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} B^0 \\ \vec{B} \end{pmatrix},$$

comme

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha B_\alpha = A^\alpha B_\alpha = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}.$$

3.2.1 Quadri-vitesse :

La vitesse quadri-dimensionnelle (4-vitesse) d'une particule est le vecteur

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau}, \quad (3.1)$$

où \underline{r} est un 4-vecteur et $d\tau$ est le temps propre de la particule. Ces composantes sont alors

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Soit un référentiel (\mathcal{R}) supposé fixe. On peut introduire à tout instant un référentiel (\mathcal{R}') rigidement lié à la particule en mouvement. Pendant l'instant dt on peut supposer que (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') sont Galiléens. Notons que, par rapport au référentiel (\mathcal{R}') la particule mobile est au repos ; c'est-à-dire $dx' = dy' = dz' = 0$.

Les intervalles dans les deux référentiels s'écrivent :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

et $ds'^2 = c^2 d\tau^2$.

En vertu de l'invariance de l'intervalle, $ds^2 = ds'^2$, on a

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

c'est-à-dire

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right),$$

comme :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \vec{v}^2,$$

\vec{v} est la vitesse de la particule dans l'espace à trois dimensions. Donc

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

or $\gamma_p = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, il vient :

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_p}, \quad (3.3)$$

Ainsi, les composantes v^α sont :

$$\begin{aligned} v^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma_p \frac{cdt}{dt} = \gamma_p c \\ v^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^1}{dt} = \gamma_p \frac{dx}{dt} = \gamma_p v_x \\ v^2 &= \frac{dx^2}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^2}{dt} = \gamma_p \frac{dy}{dt} = \gamma_p v_y \\ v^3 &= \frac{dx^3}{d\tau} = \gamma_p \frac{dx^3}{dt} = \gamma_p \frac{dz}{dt} = \gamma_p v_z. \end{aligned}$$

La 4-vitesse s'écrit aussi

$$\underline{v} = (v^0, v^1, v^2, v^3) = \gamma_p (c, \vec{v}). \quad (3.4)$$

On peut montrer que les composantes v^α se transforment comme un 4-vecteur par rapport aux transformations de Lorentz.

Calculons maintenant le produit scalaire $\underline{v}.\underline{v}$:

$$\begin{aligned} \underline{v}.\underline{v} &= v^\alpha v_\alpha = v^0 v_0 + v^i v_i, \quad i = 1, 2, 3. \\ &= (\gamma_p)^2 c^2 - (\gamma_p)^2 (\vec{v})^2 = c^2 (\gamma_p)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\underline{v}.\underline{v} = c^2}. \quad (3.5)$$

Cette quantité positive est bien invariante.

3.2.2 Quadri-vecteur accélération

Le quadri-vecteur accélération 4-accélération est défini comme étant la dérivée du quadri-vecteur vitesse par rapport au temps propre :

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{d\tau}, \quad (3.6)$$

ses composantes a^α sont données par :

$$a^\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Il existe une propriété remarquable entre les 4-vecteurs vitesse et accélération :

$$a^\alpha \cdot v_\alpha = \frac{dv^\alpha}{d\tau} v_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (v^\alpha v_\alpha) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (c^2) = 0.$$

En d'autres termes, la 4-accélération d'une particule est toujours orthogonale à sa 4-vitesse.

3.2.3 Quadri-quantité de mouvement

On définit le quadri-vecteur quantité de mouvement (4-impulsion) comme suit :

$$\boxed{\underline{p} = m\underline{v}}, \quad (3.8)$$

où m est la masse de la particule, ses composantes sont explicitement données par :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_p m c \\ \gamma_p m \vec{v} \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $\underline{v} \cdot \underline{v} = c^2$, on a :

$$\begin{aligned} (\underline{p})^2 &= \underline{p} \cdot \underline{p} = m\underline{v} \cdot m\underline{v} = m^2 (\underline{v})^2 \\ &\Rightarrow \boxed{(\underline{p})^2 = m^2 c^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Autrement dit, le carré du 4-impulsion est une quantité invariante. La norme de \underline{p} est donc

$$\boxed{\|\underline{p}\| = mc}. \quad (3.10)$$

3.3 Energie relativiste

Si on écrit la première composante du 4-impulsion comme :

$$p^0 = \frac{\text{énergie}}{\text{vitesse}} = \frac{E}{c} = m\gamma_p c, \quad (3.11)$$

où E est une énergie, il vient

$$E = m\gamma_p c^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}. \quad (3.12)$$

On peut écrire également

$$(\underline{p})^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - (\vec{p})^2 = m^2 c^2,$$

d'où la formule

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} . \quad (3.13)$$

A la limite des faibles vitesses, $v \ll c$, on a :

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) + \dots \\ E &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \end{aligned}$$

Cette formule remarquable montre, notamment, qu'en mécanique relativiste l'énergie d'une particule libre ne s'annule pas pour $v = 0$ et possède une valeur finie égale à

$$\boxed{E_0 = mc^2} , \quad (3.14)$$

c'est *l'énergie au repos* de la particule (dite aussi énergie de masse). C'est donc l'énergie associée à la masse m seule, indépendamment de tout mouvement. Un calcul numérique simple montre que cette énergie est considérable, soit par exemple :

$$m = 1\text{ kg} \quad \text{alors} \quad E_0 = 9 \times 10^{16} \text{ J} !$$

L'énergie de masse traduit donc une *équivalence fondamentale* entre la masse et l'énergie. En outre, notons que

$$\begin{aligned} E &= m\gamma_p c^2 = mc^2 - mc^2 + m\gamma_p c^2 \\ &= mc^2 + (\gamma_p - 1) mc^2, \end{aligned}$$

ainsi, on définit l'énergie cinétique relativiste par

$$\boxed{T = (\gamma_p - 1) mc^2} . \quad (3.15)$$

3.3.1 Cas des particules de masse nulle

La masse est en relation d'équivalence avec l'énergie : l'une peut se transformer en l'autre et réciproquement. Alors, sous certaines conditions, la totalité de la masse d'une particule peut se convertir en énergie pure. Alors rien n'interdit d'imaginer une particule de masse nulle.

Ecrivons encore une fois l'équation :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

on constate alors que lorsque $v = c$ (cas du photon) l'énergie E devient infinie sauf si $m = 0$. Un photon est une particule de masse nulle (sans masse) et d'une énergie finie. Le vecteur 4-impulsion associé s'écrit :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma_p mc \\ \gamma_p mv_x \\ \gamma_p mv_y \\ \gamma_p mv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E v_x}{c} \\ \frac{E v_y}{c} \\ \frac{E v_z}{c} \end{pmatrix},$$

si cet photon se propage selon l'axe des x ,

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La formule $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ de l'énergie s'écrit dans le cas du photon comme :

$$\boxed{E = pc.} \quad (3.17)$$

D'autre part, l'énergie est attribuée à la fréquence de l'onde électromagnétique ν par la relation de Max Planck :

$$\boxed{E = h\nu,} \quad (3.18)$$

où $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. On déduit des deux dernières relations la formule de De Broglie traduisant la dualité onde-corpuscule :

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad (3.19)$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde du rayonnement. Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation et \vec{k} le vecteur d'onde de module $k = 2\pi/\lambda = \frac{\omega}{c}$. Ainsi, le 4-vecteur énergie-impulsion s'écrit :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{c} \\ \hbar \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar k \\ \hbar \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow (\underline{p})^2 = 0. \quad (3.20)$$

La norme du 4-vecteur énergie-impulsion d'un photon est nulle qui est en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

3.4 Relation fondamentale de la dynamique relativiste

On définit le quadri-vecteur force ou en bref la 4-force comme :

$$\underline{f} = \frac{d\underline{p}}{d\tau}, \quad (3.21)$$

où $d\tau = dt/\gamma$ est le temps propre, \underline{p} est la 4-impulsion :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}.$$

Donc on a :

$$\underline{f} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc \gamma \frac{d\gamma}{dt} \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

mais

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{v}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{accélération},$$

c'est-à-dire :

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} mc \frac{\gamma^4}{c^2} \vec{a} \cdot \vec{v} \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

3.5 Théorème de l'énergie cinétique

On a vu que $(\underline{p})^2$ est un invariant et que :

$$(\underline{p})^2 = \underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 c^2, \quad (3.23)$$

dérivons (3.23) par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} (\underline{p} \cdot \underline{p}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\underline{p} \cdot \frac{d\underline{p}}{dt} = 0,$$

ou bien

$$\underline{p} \cdot \underline{f} = 0,$$

faisons ce produit scalaire explicitement :

$$\begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \frac{d}{dt} (\gamma mc) \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix} = 0.$$

Soit $\frac{E}{c} = \gamma mc$, il vient :

$$\begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{c} \right) \\ \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} \end{pmatrix} = 0,$$

on obtient :

$$\frac{d(E)}{dt} - \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v},$$

$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Mais $E = T + mc^2$, T énergie cinétique et mc^2 énergie de masse, donc :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}},$$

qui est le théorème de l'énergie cinétique. \mathcal{P} est la puissance associée à la force \vec{f} . Ainsi, les composantes du 4-force s'écrit aussi comme suit :

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c} (\mathcal{P}) \\ \gamma \vec{F} \end{pmatrix}.$$

3.6 Conservation de la quadri-quantité de mouvement

Postulat : Pour un système isolé la quadri-quantité de mouvement est une quantité conservée au cours du temps.

Exemple :

Considérons deux particules identiques de masse $2m$, l'une à une vitesse \vec{v} suivant l'axe des x et l'autre est au repos. Ces particules entre en choc parfaitement mou pour former une particule de masse M de vitesse \vec{v}' (suivant l'axe des x). Donner l'expression de la masse M .

Solution :

Avant le choc la masse totale est $2m$. Les 4-impulsions des deux particules sont :

$$(\underline{p})_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_1} mc \\ \gamma_{p_1} mv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\underline{p})_2 = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

après le choc la masse est M , alors on a :

$$(\underline{p})_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} M c \\ \gamma_{p_3} M v' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur 4-impulsion est une quantité conservée (avant et après le choc) d'où ;

$$(\underline{p})_1 + (\underline{p})_2 = (\underline{p})_3 ,$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} (\gamma_{p_1} + 1) m c \\ \gamma_{p_1} m v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} M c \\ \gamma_{p_3} M v' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

qui donne :

$$\begin{aligned} (\gamma_{p_1} + 1) m &= \gamma_{p_3} M \\ \gamma_{p_1} m \beta &= \gamma_{p_3} M \beta' , \end{aligned}$$

prenons le carré puis faisons la différence

$$\left[(\gamma_{p_1} + 1)^2 - (\gamma_{p_1})^2 \beta^2 \right] m^2 = \left[1 - (\beta')^2 \right] (\gamma_{p_3})^2 M^2 .$$

Il vient,

$$M = \sqrt{(2\gamma_{p_1} + 2)} m \geq 2m .$$

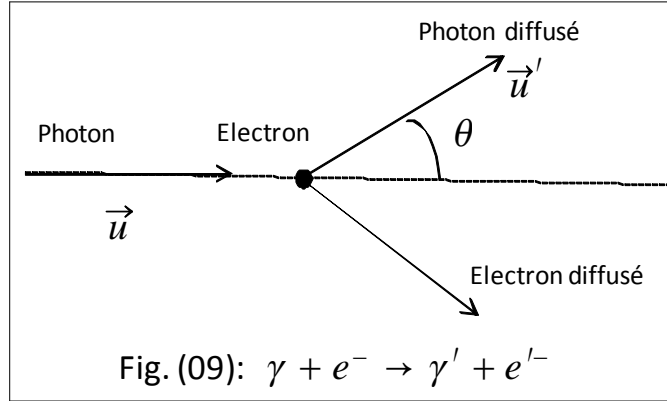
Une partie d'énergie cinétique s'est transformée en énergie de masse.

3.7 Effet Compton

Compton a observé que lorsqu'un faisceau des rayons X dur monochromatique (des photons très énergétiques) est diffusé par un bloc de graphite, le rayonnement diffusé se compose de deux composantes, l'une ayant la même longueur d'onde que le rayonnement incident et l'autre ayant une longueur d'onde légèrement plus longue. Compton a expliqué la présence du rayonnement de longueur d'onde plus longue en considérant la diffusion comme une collision élastique entre

un photon unique et un électron libre au repos initialement. La collision est élastique dans le sens où l'énergie cinétique obtenue par l'électron est égale à l'énergie perdue par le photon.

Supposons un photon venant de la gauche et se dirigeant vers la droite suivant un vecteur unitaire \vec{u} . Le photon est diffusé par un électron au repos dans une direction faisant un angle θ par rapport à la direction initiale (voir figure (09)).



Pour déterminer la variation de la longueur d'onde du photon dû à la collision, nous allons utiliser la conservation de la 4-quantité de mouvement avant et après la collision :

$$(\underline{p})_{\gamma} + (\underline{p})_e = (\underline{p}')_{\gamma} + (\underline{p}')_e . \quad (3.24)$$

Avant la collision :

$$(\underline{p})_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \vec{u} \end{pmatrix}, \quad (\underline{p})_e = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} .$$

Après la collision :

$$(\underline{p}')_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c} \vec{u}' \end{pmatrix}, \quad (\underline{p}')_e = \begin{pmatrix} \gamma_e m_e c \\ \vec{p}' \end{pmatrix} .$$

Soit

$$(\underline{p})_{\gamma} + (\underline{p})_e - (\underline{p}')_{\gamma} = (\underline{p}')_e ,$$

puis prenons le carré

$$\left[(\underline{p})_{\gamma} + (\underline{p})_e - (\underline{p}')_{\gamma} \right]^2 = (\underline{p}')_e^2 ,$$

explicitement :

$$(\underline{p})_{\gamma}^2 + (\underline{p})_e^2 + (\underline{p}')_{\gamma}^2 + 2 (\underline{p})_{\gamma} \cdot (\underline{p})_e - 2 (\underline{p})_{\gamma} \cdot (\underline{p}')_{\gamma} - 2 (\underline{p})_e \cdot (\underline{p}')_{\gamma} = (\underline{p}')_e^2 ,$$

mais pour un photon le carré du 4-vecteur quantité de mouvement (4-impulsion) est nul, c'est-à-dire :

$$(\underline{p})_\gamma^2 = 0, \quad (\underline{p}')_\gamma^2 = 0,$$

et pour l'électron on a :

$$(\underline{p})_e^2 = m_e^2 c^2, \quad (\underline{p}')_e^2 = m_e^2 c^2,$$

il vient

$$(\underline{p})_\gamma \cdot (\underline{p})_e - (\underline{p})_\gamma \cdot (\underline{p}')_\gamma - (\underline{p})_e \cdot (\underline{p}')_\gamma = 0. \quad (3.25)$$

Effectuons les produits scalaires :

$$(\underline{p})_\gamma \cdot (\underline{p})_e = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \vec{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = m_e E \quad (3.26)$$

$$(\underline{p})_\gamma \cdot (\underline{p}')_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \vec{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c} \vec{u}' \end{pmatrix} = \frac{EE'}{c^2} - \frac{EE'}{c^2} \vec{u} \cdot \vec{u}'$$

$$(\underline{p})_\gamma \cdot (\underline{p}')_\gamma = \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \theta). \quad (3.27)$$

$$(\underline{p})_e \cdot (\underline{p}')_\gamma = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c} \vec{u}' \end{pmatrix} = m_e E', \quad (3.28)$$

remplaçons dans (3.25), il vient :

$$m_e E - \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \theta) - m_e E' = 0,$$

c'est-à-dire

$$m_e (E - E') = \frac{EE'}{c^2} (1 - \cos \theta),$$

qui s'écrit aussi comme :

$$\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta).$$

L'énergie E est donnée en fonction de la constante de Planck et la fréquence par :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

on obtient finalement

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta),$$

ou bien

$$\boxed{\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (3.29)$$

où $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$ est la longueur d'onde de Compton qui est de l'ordre de $2,4 \times 10^{-12} m$.

Après la diffusion, le photon dispersé à une énergie inférieure, et selon la relation de Planck a une fréquence plus faible a une plus longue longueur d'onde. Cette expérience a mis clairement en évidence l'aspect corpusculaire de la lumière.

3.8 Référentiel du centre de masse

Le centre de masse (le barycentre) d'un ensemble de points matériels dans un référentiel (\mathcal{R}) d'origine O est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_i m_i}. \quad (3.30)$$

Si on prend le point G comme origine d'un nouveau référentiel noté (\mathcal{R}^*) , on a :

$$\overrightarrow{GG} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0},$$

puis dérivons par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \underbrace{\frac{\overrightarrow{GM}_i}{dt}}_{\overrightarrow{v}^*} &= \overrightarrow{0} \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{v}^* = \overrightarrow{0} \\ &\Rightarrow \boxed{\sum_i \overrightarrow{p}^* = \overrightarrow{0}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Soit un système isolé de N particules indépendantes, en mouvement dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) . Ainsi, il est possible de définir la somme des énergies et la somme des impulsions des différentes particules dans (\mathcal{R}) :

$$E = \sum_{i=1}^N E_i, \quad \overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{p}_i. \quad (3.32)$$

Par définition, le référentiel du centre de masse de ce système est le référentiel (\mathcal{R}^*) en translation par rapport à (\mathcal{R}) , dans lequel l'impulsion du système est nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{p}^* = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{p}_i^* = \overrightarrow{0}}. \quad (3.33)$$

Le 4-vecteur énergie-impulsion du système dans (\mathcal{R}^*) s'écrit alors :

$$\underline{p}^* = \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix},$$

avec $E^* = \sum_{i=1}^N E_i^*$ est l'énergie du système dans (\mathcal{R}^*) .

Remarque : puisque des particules comme le photon n'ont pas de masse, il s'ensuit que le terme "centre de masse" peut être ambigu. Il n'est donc pas possible de définir comme en mécanique classique, la position du centre de masse. Cette position sera définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^N E_i}. \quad (3.34)$$

Soit \vec{V} la vitesse de (\mathcal{R}^*) par rapport à (\mathcal{R}) selon l'axe Ox . La transformation de Lorentz permet de passer de \underline{p} à \underline{p}^* . Si on suppose que \vec{p} n'a qu'une composante suivant cet axe Ox , comme c'est effectivement le cas dans les accélérateurs de particules, alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

avec : $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$, $\beta = V/c$.

La deuxième équation du système (3.35) donne la vitesse de (\mathcal{R}^*) par rapport à (\mathcal{R}) :

$$\boxed{\vec{V} = \frac{c^2}{E} \vec{p}}, \quad (3.36)$$

\vec{V} est constante car E et \vec{p} sont constantes puisque le système est isolé \Rightarrow Le référentiel du centre de masse est donc galiléen. L'énergie du système dans (\mathcal{R}^*) s'écrit en considérant maintenant la première équation du système (3.35) comme suit :

$$E^* = \frac{E}{\gamma} \Rightarrow \boxed{E^* < E}$$

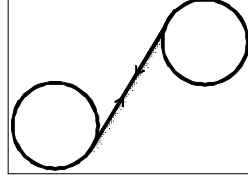
\Rightarrow La valeur d'énergie E^* , mesurée dans le référentiel du centre de masse, est inférieure à celle que l'on mesure dans (\mathcal{R}) . La norme du 4-vecteur énergie-impulsion du système s'écrit :

$$\frac{E^{*2}}{c^2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2. \quad (3.37)$$

On voit que l'énergie du système est minimale dans le référentiel du centre de masse.

Comme application de ce résultat dans les collisionneurs de particules. Pour fournir le minimum d'énergie à deux particules entrant en collision dans le référentiel du laboratoire

(\mathcal{R}) , il faut s'arranger pour que (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}^*) coïncident. Ceci est possible en utilisant des anneaux collisionneurs dont le principe est indiqué sur la figure ci-dessous :



Collision de deux particules venant en sens inverse

Dans ce cas les particules ont des vitesses opposées, et si $\vec{p} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \vec{0}$ alors $E^* = E$.

3.9 Collisions de particules

Définitions :

i) Une collision entre particules est dite *élastique* si la nature et le nombre des particules sont conservés avant et après la collision.

ii) Une collision entre particules est dite *inélastique* si la nature et/ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Propriété caractéristique des collisions dans (\mathcal{R}^*) :

Considérons une collision élastique entre deux particules A_1 et A_2 dans (\mathcal{R}^*) . En primant les grandeurs après collision, il vient:

$$(\underline{p}^*)_{avant} = \begin{pmatrix} \frac{E_1^* + E_2^*}{c} \\ \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (\underline{p}^*)_{après} = \begin{pmatrix} \frac{E_1'^* + E_2'^*}{c} \\ \vec{p}_1'^* + \vec{p}_2'^* = \vec{0} \end{pmatrix},$$

comme $(\underline{p}^*)_{avant} = (\underline{p}^*)_{après}$ donc

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{p}_1'^* + \vec{p}_2'^* = \vec{0} \quad (3.38)$$

$$E_1^* + E_2^* = E_1'^* + E_2'^*, \quad (3.39)$$

d'après (3.38) :

$$\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \Rightarrow p_1^{*2} = p_2^{*2} \Rightarrow c^2 p_1^{*2} = c^2 p_2^{*2},$$

et la relation $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ c-à-d $p^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4$ on a donc pour chacune des particules :

$$\begin{aligned} p_1^{*2} c^2 &= E_1^{*2} - m_1^2 c^4 = p_2^{*2} c^2 = E_2^{*2} - m_2^2 c^4 \\ p_1'^{*2} c^2 &= E_1'^{*2} - m_1^2 c^4 = p_2'^{*2} c^2 = E_2'^{*2} - m_2^2 c^4, \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} E_1^{*2} - m_1^2 c^4 &= E_2^{*2} - m_2^2 c^4 \\ E_1'^{*2} - m_1^2 c^4 &= E_2'^{*2} - m_2^2 c^4 , \end{aligned}$$

faisons la différence :

$$E_1^{*2} - E_1'^{*2} = E_2^{*2} - E_2'^{*2} \Rightarrow E_1^{*2} - E_2^{*2} = E_1'^{*2} - E_2'^{*2} ,$$

c-à-d :

$$(E_1^* - E_2^*)(E_1^* + E_2^*) = (E_1'^* - E_2'^*)(E_1'^* + E_2'^*) ,$$

d'après (3.39), on obtient :

$$E_1^* - E_2^* = E_1'^* - E_2'^* , \quad (3.40)$$

de (3.39) et (3.40), on a :

$$\boxed{E_1^* = E_1'^* \quad \text{et} \quad E_2^* = E_2'^*} , \quad (3.41)$$

et

$$\|\vec{p}_1^*\| = \|\vec{p}_2^*\| = \|\vec{p}_1'^*\| = \|\vec{p}_2'^*\| . \quad (3.42)$$

Chaque particule a donc même énergie et même norme de sa quantité de mouvement avant et après la collision dans le référentiel du centre de masse. Cette propriété de conservation de l'énergie de chaque particule dans (\mathcal{R}^*) nous permis de savoir si la collision est élastique ou non en comparant la perte d'énergie subie par la particule incidente uniquement.

3.10 Energie de seuil d'une collision inélastique

Définition : L'énergie de *seuil* de production de Q particules lors d'une collision inélastique, est l'énergie cinétique minimale T_{\min} des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse (\mathcal{R}^*) .

Soit, par exemple, deux particules ; le projectile A_1 et une cible A_2 au repos par rapport au référentiel fixe (\mathcal{R}) . Supposons qu'après la collision apparaissent plusieurs particules A_3, A_4, A_5, \dots etc, c-à-d :

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4 + A_5 + \dots , \quad (3.43)$$

pour que cette réaction de production ait lieu, il faut que l'énergie E^* du système de particules incidentes dans (\mathcal{R}^*) soit supérieure ou égale à l'énergie au repos du système des particules formées :

$$\boxed{E^* \geq \sum_f m_f c^2}, \quad (3.44)$$

où ici m_f , $f = 3, 4, 5, \dots$ sont les masses des particules formées (après la collision).

Exercice d'application : Un faisceau de proton (P^+), d'énergie cinétique T , bombarde une cible de cuivre dont, les noyaux contiennent des protons pratiquement immobiles dans le référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire. On obtient des antiprotons (P^-) particules de même masse $M = 938 \text{ Mev}/c^2$ que les protons mais de charge opposée, suivant la réaction nucléaire :



1) Exprimer l'énergie totale E^* du système de particule dans le référentiel du centre de masse (\mathcal{R}^*) en fonction de T et Mc^2 .

2) En déduire, dans (\mathcal{R}) , l'énergie cinétique minimale T_{\min} des protons incidents pour produire des antiprotons suivant la réaction envisagée.

Solution :

1) Les 4-vecteurs énergie-impulsion avant la collision sont :

- Dans (\mathcal{R}) : $\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$, avec $E = T + 2Mc^2 = \text{énergie totale}$.

et \vec{p} l'impulsion totale qui est, ici, l'impulsion du proton incident.

- Dans (\mathcal{R}^*) : $\underline{p}^* = \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$

Calculons $(\underline{p})^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2$ et $(\underline{p}^*)^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2$. Comme $(\underline{p})^2 = (\underline{p}^*)^2$ (invariance du carré scalaire du quadri-vecteur), il vient :

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} E^{*2} &= E^2 - \vec{p}^2 c^2 \\ \Rightarrow E^{*2} &= (T + 2Mc^2)^2 - \vec{p}^2 c^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Calculons \vec{p} : Pour le proton incident seul on a :

$$\begin{aligned} (\underline{p})_1 &= \left(\frac{\frac{E_1}{c}}{\vec{p}} \right) \Rightarrow \left[(\underline{p})_1 \right]^2 = \frac{(E_1)^2}{c^2} - \vec{p}^2 = M^2 c^2 \\ \Rightarrow \vec{p}^2 c^2 &= E_1^2 - M^2 c^4, \end{aligned}$$

et $E_1 = T + Mc^2$ c-à-d :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{p}^2 c^2 &= (T + Mc^2)^2 - M^2 c^4 \\ \Rightarrow \vec{p}^2 c^2 &= T(T + 2Mc^2). \end{aligned} \quad (3.46)$$

D'après (3.45) et (3.46) on déduit l'énergie E^* :

$$\begin{aligned} E^{*2} &= (T + 2Mc^2)^2 - T(T + 2Mc^2) \\ \Rightarrow E^* &= \sqrt{2Mc^2(T + 2Mc^2)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

2) Pour que la réaction de production de l'antiproton ait lieu, il faut que l'énergie du système de particules dans (\mathcal{R}^*) soit supérieure ou égale à l'énergie au repos du système des 4 particules formées :

$$E^* \geq 4Mc^2$$

D'après (3.47) on a :

$$2Mc^2(E_c + 2Mc^2) \geq 16M^2c^4$$

donc

$$T \geq 6Mc^2$$

Le seuil d'énergie cinétique des protons incidents est donc :

$$T_{\min} = 6Mc^2$$

Application numérique : $T_{\min} = 5,63 \text{ GeV}$.

3.11 Exercices

Exercice 01 : (*Relations relativistes*)

Soit un référentiel fixe (\mathcal{R}) où une particule de masse m , de quantité de mouvement \vec{p} , d'énergie cinétique T , est animée

d'une vitesse \vec{v} . on pose $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

1) Exprimer T et p en fonction de m et γ . 2) Exprimer T en fonction de p et γ .

3) Etablir la relation $\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{E_c + mc^2}$.

Exercice 02 :

Un proton de masse $m = 938 \text{ Mev}/c^2$ possède une quantité de mouvement de module $p = 3 \text{ Gev}/c$. Calculer :

a) l'énergie E de ce proton. b) le module v de sa vitesse. c) Son énergie cinétique.

Exercice 03 :

A quelle vitesse devrait se déplacer un vaisseau spatiale s'éloignant de la Terre pour qu'un observateur terrestre perçoive rouge la lumière émise par ses feux arrières verts ?

On prendra pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,7 \mu m$ pour la radiation rouge et $\lambda' = 0,5 \mu m$ pour la radiation verte.

Exercice 04 : (*Effet Doppler*)

Une source monochromatique, fixe dans le référentiel (\mathcal{R}), émet une onde lumineuse plane, de fréquence ν , dans la direction Ou du plan xOy , telle que $(Ox, Ou) = \theta$. Un observateur est lié au référentiel (\mathcal{R}') en translation uniforme de vitesse \vec{V} par rapport à Ox .

1) En utilisant le quadri-vecteur d'onde $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, déterminer en fonction de ν , θ et $\beta = \frac{V}{c}$ la fréquence ν' , de l'onde mesurée par l'observateur.

2) Trouver la direction θ' de propagation, par rapport à Ox , de l'onde lumineuse perçue par l'observateur en fonction de θ et β .

3) Comparer ν et ν' , puis θ et θ' dans les deux cas particuliers :

a) Si l'observateur se déplace dans la même direction que l'onde émise.

b) Si l'observateur se déplace perpendiculairement à la direction de l'onde émise. Ce résultat est-il possible selon la théorie classique ?

Exercice 05 : (*Transformation des forces*)

Le référentiel (\mathcal{R}') est animé d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V} = \vec{\beta} c$ (parallèle à l'axe Ox) par rapport au référentiel (\mathcal{R}) galiléen. Dans le référentiel (\mathcal{R}'), une particule

M est soumise à une force \vec{F}' et possède la vitesse $\vec{v}' (v'_x, v'_y, v'_z)$; dans (\mathcal{R}) , cette même particule est soumise à une force \vec{F} et possède la vitesse $\vec{v} (v_x, v_y, v_z)$.

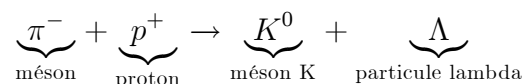
Etablir les relations donnant les composantes F'_x, F'_y, F'_z de la force \vec{F}' agissant sur la particule M dans (\mathcal{R}') en fonction des composantes F_x, F_y, F_z de la force agissant sur cette particule dans (\mathcal{R}) .

Exercice 06 : (*Collision inélastique*)

On considère le choc inélastique d'un positron (e^+) en mouvement sur un électron (e^-) immobile dans le référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire supposé galiléen. Quelle doit être l'énergie cinétique minimale du positron incident pour qu'il y ait formation d'un méson π^0 et de photons. On donne : $m_{e^-} = m_{e^+} = 0,511 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}/c^2$.

Exercice 07 : (*Condition de production de mesons K^0*)

On bombarde par un méson π^- , d'énergie E_1 et de quantité de mouvement \vec{p}_1 , un proton cible au repos par rapport au référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire, dans le but d'obtenir un méson K^0 neutre suivant la réaction



On donne les masses des particules

$$m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2 \quad m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_K = 498 \text{ MeV}/c^2 \quad m_\Lambda = 1115 \text{ MeV}/c^2$$

1) Soit le référentiel (\mathcal{R}^*) , en translation uniforme par rapport au référentiel (\mathcal{R}) , animé d'une vitesse \vec{V} parallèlement à \vec{p}_1 , et dans lequel la somme des quantités de mouvement des particules π^- et p^+ : $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$.

a) Comment appelle-t-on le référentiel (\mathcal{R}^*) ?

b) Utiliser la transformation de Lorentz entre les quadri-vecteurs impulsion-énergie pour exprimer $\beta = \frac{V}{c}$ en fonction de E_1 , m_π et m_p .

2) Exprimer les énergies respectives E_1^* et E_2^* du pion π^- et du proton p^+ dans (\mathcal{R}^*) , en fonction de E_1 , m_p et m_π , ainsi que l'énergie totale $E^* = E_1^* + E_2^*$ du système (π^-, p^+) .

3) Déterminer la valeur minimale de l'énergie totale E^* , et calculer l'énergie cinétique minimale du méson π^- pour que la réaction soit possible (seuil de réaction). Faire l'application numérique.

Exercice 08 : (*Désintégration du méson π^0*)

Un méson neutre π^0 , de masse $m = 135 \text{ MeV}/c^2$, d'énergie $E = 225 \text{ MeV}$ et de vitesse $V = \beta c$ par rapport à un référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire, se désintègre en deux photons gamma :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2.$$

Dans le référentiel (\mathcal{R}^*) du centre de masse, l'un des photon (γ_1) est émis dans la direction faisant l'angle $\theta^* = \frac{\pi}{3}$ avec la direction du méson incident.

- 1) Calculer les énergies E_1^* et E_2^* des deux photons, mesurées dans (\mathcal{R}^*).
- 2) Exprimer en fonction de m , β et θ^* , les énergies E_1 et E_2 des deux photons, mesurées dans (\mathcal{R}). Application numérique.
- 3) Exprimer les énergies minimale et maximale de chacun des photons, dans le référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire. Application numérique.

Exercice 09 : (*Collision inélastique*)

On réalise la collision suivante entre un photon ($m_\gamma = 0$) et un proton ($m_p = 938.25 \text{ MeV}/c^2$) immobile dans le référentiel du laboratoire (\mathcal{R}) :

$$\gamma + p^+ \rightarrow n + \pi^+$$

collision engendrant un neutron ($m_n = 939.55 \text{ MeV}/c^2$) et un pion ($m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$).

- 1) Établir la relation entre l'énergie $E_\gamma = p_\gamma c$ dans (\mathcal{R}) du photon incident et l'énergie totale du système dans le référentiel du centre de masse (\mathcal{R}^*).
- 2) Quelle est l'énergie seuil de la réaction dans (\mathcal{R}^*) ? 3) Calculer l'énergie seuil du photon dans (\mathcal{R}).

Exercice 10 :

On réalise dans le référentiel du laboratoire (\mathcal{R}) une collision entre un photon d'impulsion \vec{p} suivant l'axe des x et d'énergie E_1 et un électron de masse $m = 0,5 \text{ MeV}/c^2$ au repos :

$$\gamma + e^- \rightarrow (e^+ + e^-) + e^-$$

collision engendrant un positron (même masse que l'électron avec une charge positive) et deux électrons.

- 1) Établir la relation entre l'énergie E_1 dans (\mathcal{R}) du photon incident et l'énergie totale du système E^* dans le référentiel du centre de masse (\mathcal{R}^*) en se basant sur l'invariance du carré du quadri-vecteur énergie-impulsion du système ($\gamma + e^-$).

- 2) Montrer que cette réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon E_1 est supérieure à une valeur limite E_0 que l'on déterminera. Application numérique.

- 3) Soit V la vitesse du référentiel (\mathcal{R}^*) par rapport à (\mathcal{R}). En utilisant la transformation de Lorentz du 4-vecteur impulsion-énergie du système ($\gamma + e^-$), montrer que le facteur $\beta = \frac{V}{c}$ est donné par :

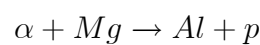
$$\beta = \frac{E_1}{E_1 + mc^2}$$

puis utiliser la transformation de Lorentz du 4-vecteur impulsion-énergie du photon pour déterminer l'énergie E_1^* du photon mesurée dans (\mathcal{R}^*) en fonction de E_1 et m avant la collision.

4) Déterminer l'énergie cinétique de l'électron T_2^* dans (\mathcal{R}^*) en fonction de E_1 et m avant la collision. Application numérique : $E_1 = 4$ MeV, calculer E_1^* et T_2^* .

Exercice 11 : (*Seuil d'une réaction nucléaire*)

On bombarde par une particule α (noyau d'Hélium), d'énergie E_1 et de quantité de mouvement \vec{p}_1 suivant l'axe Ox , un atome cible de Magnésium (Mg) au repos par rapport au référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire, selon la réaction suivante :



collision engendrant un atome d'aluminium (Al) et un proton (p).

On donne les masses : $m_{Mg}c^2 = 22,342$ GeV , $m_{Al}c^2 = 25,133$ GeV
 $m_p c^2 = 0,938$ GeV, $m_\alpha c^2 = 3,728$ GeV.

1) Soit le référentiel (\mathcal{R}^*) , en translation uniforme par rapport au référentiel (\mathcal{R}) , animé d'une vitesse \vec{V} parallèlement à \vec{p}_1 , et dans lequel la somme des quantités de mouvement du système ($\alpha + Mg$) : $\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$.

a) Comment appelle-t-on le référentiel (\mathcal{R}^*) ?

b) Utiliser la transformation de Lorentz entre les quadri-vecteurs impulsion-énergie du système ($\alpha + Mg$) pour exprimer $\beta = \frac{V}{c}$ en fonction de E_1 , m_α et m_{Mg} .

2) Exprimer les énergies respectives E_1^* et E_2^* du particule α et de l'atome Mg dans (\mathcal{R}^*) en fonction de E_1 , m_{Mg} et m_α , ainsi que l'énergie totale $E^* = E_1^* + E_2^*$ du système.

3) a) Déterminer la valeur minimale de l'énergie totale E^* .

b) Montrer que l'énergie cinétique minimale T_{\min} du particule α pour que la réaction soit possible (seuil de réaction) est :

$$T_{\min} = \frac{(m_p + m_{Al})^2 - (m_\alpha + m_{Mg})^2}{2m_{Mg}} c^2$$

c) Calculer la valeur numérique de T_{\min} en MeV.

Chapitre 4

Electromagnétisme et relativité restreinte

4.1 Introduction

L'électromagnétisme a joué un rôle primordial dans l'élaboration de la théorie de la relativité restreinte. En effet, le point clé de l'analyse d'Einstein a été l'extension du principe de la relativité à toutes les lois de la Nature, notamment à l'électromagnétisme. En fait, la relativité permet une étude plus cohérente de l'électricité et du magnétisme. Ainsi, nous constatons que l'électromagnétisme est un phénomène relativiste puisque, un champ purement électrique ou purement magnétique dans un référentiel d'inertie se trouve à la fois avec des composantes électriques et magnétiques dans un autre référentiel inertiel.

Dans ce dernier chapitre, nous allons développer le lien entre l'électromagnétisme et la relativité.

4.2 Rappel des lois de l'électromagnétisme dans le vide

Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, sont celles auxquelles satisfait le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) créée par des sources :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Equation de Maxwell Faraday}) \quad (4.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{Flux magnétique}) \quad (4.2)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{Equation de Maxwell Gauss}) \quad (4.3)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Equation de Maxwell Ampère}) \quad (4.4)$$

où ρ est la charge volumique, \vec{j} et le vecteur courant volumique, ε_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. Ces deux dernières constantes sont reliées à la vitesse de la lumière par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.5)$$

A ces équations, il convient d'ajouter que toute particule de charge q est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right), \quad (4.6)$$

ce qui permet de déduire la dynamique de cette particule.

Les équations de Maxwell sont des équations locales c'est-à-dire qu'elles sont valables en tout point et à tout instant. Rappelons aussi que les deux premières équations sont des équations structurelles du champ électromagnétique, alors que les deux dernières relient le champ aux sources. Ces équations s'interprètent comme suit :

i) La première équation exprime la loi d'induction électromagnétique ; toute variation de \vec{B} dans le temps crée un champ électrique \vec{E} .

ii) La deuxième traduit localement la conservation du flux du champ magnétique \vec{B} à travers toutes surface fermée.

iii) La troisième est la forme locale du théorème de Gauss ; elle relie le champ électrique \vec{E} à la charge volumique (densité de charge) des sources qui le produisent.

iv) La quatrième équation montre que toute variation de \vec{E} dans le temps peut créer un champ magnétique, même en absence de courant ($\vec{j} = \vec{0}$).

Si on introduit un *potentiel vecteur* \vec{A} tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (4.7)$$

alors la première équation de Maxwell s'écrit

$$\overrightarrow{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} ,$$

d'où

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} ,$$

où ϕ est un *potentiel scalaire*. Remplaçons l'expression du champ électrique dans l'équation de Maxwell (4.3), il vient :

$$\text{div} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} ,$$

c'est-à-dire

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} ,$$

de même l'équation de Maxwell (4.4) donne :

$$\overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} ,$$

appliquons la formule :

$$\overrightarrow{rot} (\overrightarrow{rot} \vec{A}) = \vec{\nabla} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} ,$$

et notons que $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$, on peut donc avoir l'expression :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} ,$$

comme les potentiels ϕ et \vec{A} ne sont pas totalement définis, on peut imposer la condition suivante, appelée jauge de Lorentz :

$$\boxed{\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.} \quad (4.8)$$

Ainsi, les potentiels satisfont aux équations de propagation suivantes :

$$\square \phi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} , \quad (4.9)$$

$$\square \vec{A} = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} . \quad (4.10)$$

Pour lesquelles $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est un opérateur appelé le *d'Alembertien*. Ces deux dernières équations traduisent la propagation des potentiels ϕ et \vec{A} , à la vitesse de la lumière c dans le vide à partir des sources (ρ et \vec{j}), et par suite celle des champs \vec{E} et \vec{B} .

Postulat : la charge électrique q d'une particule, comme sa masse m , est invariante par changement de référentiel galiléen.

4.3 Quadri-courant et quadri-potentiel

Quadri-courant :

Soit une charge dq contenue dans un volume élémentaire $dV = dxdydz$. La charge volumique correspondante par rapport à un référentiel d'inertie (\mathcal{R}) est :

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (4.11)$$

Supposons maintenant que cette charge est centrée autour d'un point en mouvement quelconque, de vitesse \vec{v} par rapport à (\mathcal{R}) . Pour simplifier, on suppose que l'axe des x est parallèle à \vec{v} et introduisons le référentiel d'inertie (\mathcal{R}') lié à la charge dq . Comme dq est au repos par rapport à (\mathcal{R}') , on peut définir la charge volumique propre (dans (\mathcal{R}')) comme suit :

$$\rho_0 = \frac{dq}{dV'}, \quad (4.12)$$

où $dV' = dx'dy'dz' = \gamma dV$, puisque $dx' = \gamma dx$, $dy' = dy$, $dz' = dz$, soit alors :

$$dq = \gamma \rho_0 dV = \rho dV,$$

il vient

$$\boxed{\rho = \gamma \rho_0}, \quad (4.13)$$

avec $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

On définit ainsi le *4-courant* à partir de la 4-vitesse \underline{v} et la charge volumique propre ρ_0 :

$$\underline{j} = \rho_0 \underline{v} = \rho_0 (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\rho c, \rho \vec{v}) = \left(\underbrace{\rho c}_{\text{Electricité}}, \underbrace{\vec{j}}_{\text{Magnétisme}} \right). \quad (4.14)$$

Quadri-potentiel : On définit aussi le 4-potentiel \underline{A} par :

$$\underline{A} = \left(\underbrace{\frac{\phi}{c}}_{\text{Electricité}}, \underbrace{\vec{A}}_{\text{Magnétisme}} \right). \quad (4.15)$$

4.4 Formules de transformation des champs

Les champs \vec{E} et \vec{B} ne se transforment pas comme un 4-vecteur lors d'une transformation de Lorentz. Nous allons ainsi chercher les lois de transformations de ces champs. Rappelons

d'abord les transformations de Lorentz :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma (ct - \beta x) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma (x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma (ct' + \beta x') \end{array} \right. ,$$

où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $\beta = \frac{V}{c}$. La dérivée par rapport à x s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial ct'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial ct'} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta \frac{\partial}{\partial ct'} \right) , \end{aligned} \quad (4.16)$$

et les dérivations par rapport aux variables y et z restent inchangées :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} , \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} , \quad (4.18)$$

et de même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial ct} &= \frac{\partial x'}{\partial ct} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial ct'}{\partial ct} \frac{\partial}{\partial ct'} \\ \frac{\partial}{\partial ct} &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \beta \frac{\partial}{\partial x'} \right) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puisque $\underline{A} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$ est un 4-vecteur, il se transforme ainsi par une transformation de Lorentz comme :

$$\phi = \gamma (\phi' + V A'_x) , \quad A_x = \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c^2} \phi' \right) , \quad A'_y = A_y , \quad A'_z = A_z . \quad (4.20)$$

4.4.1 Transformation du champ magnétique

Le champ magnétique \vec{B} est donné par la relation (4.7) ou explicitement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right. . \quad (4.21)$$

Tenons compte de (4.17), (4.18) et (4.20), la composante suivant Ox de \vec{B} se transforme comme suit :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = B'_x .$$

La composante suivant Oy :

$$\begin{aligned}
 B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\
 B_y &= \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left(A'_x + \frac{\beta}{c} \phi' \right) - \gamma \left(\frac{\partial A'_z}{\partial x'} - \beta \frac{\partial A'_z}{\partial ct'} \right) \\
 B_y &= \gamma \left(\frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} \right) + \frac{\gamma \beta}{c} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z'} + \frac{\partial A'_z}{\partial t'} \right) \\
 B_y &= \gamma \left(B'_y - \frac{\beta}{c} E'_z \right),
 \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations (4.16) et (4.20). On trouvera de même la composante suivant Oz :

$$B_z = \gamma \left(B'_z + \beta \frac{E'_y}{c} \right).$$

Résumé :

$$\boxed{B_x = B'_x, \quad B_y = \gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right), \quad B_z = \gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right).} \quad (4.22)$$

Notons que les relations inverses ; c'est-à-dire celles donnant \vec{B}' en fonction de \vec{E} et \vec{B} s'obtiennent évidemment en changeant β en $-\beta$.

4.4.2 Transformation du champ électrique

Par une méthode similaire à celle du champ magnétique, on obtient

$$\boxed{E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma \left(E'_y + V B'_z \right), \quad E_z = \gamma \left(E'_z - V B'_y \right).} \quad (4.23)$$

Les relations \vec{E}' en fonction de \vec{E} et \vec{B} s'obtiennent en changeant β en $-\beta$.

Une forme plus compacte s'obtient en décomposant les vecteurs en une composante parallèle à la vitesse \vec{V} de translation du référentiel mobile et une composante orthogonale :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{//} &= \vec{E}'_{//}, & \vec{B}_{//} &= \vec{B}'_{//} \\
 \vec{E}_{\perp} &= \gamma \left[\vec{E}'_{\perp} - \left(\vec{V} \times \vec{B}' \right)_{\perp} \right], & \vec{B}_{\perp} &= \gamma \left[\vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c^2} \left(\vec{V} \times \vec{E}' \right)_{\perp} \right].
 \end{aligned}$$

Ces formules de transformations des champs montrent bien qu'un champ électrique pur (ou magnétique pur) dans (\mathcal{R}) se présente dans (\mathcal{R}') comme un champ électrique et un champ magnétique. Cela n'est pas une surprise puisque les sources de champ magnétique sont des charges en mouvement.

4.5 Formalisme tensoriel en relativité

Soit le 4-vecteur \underline{w} tel que :

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

ses composantes se transforment selon les transformations de Lorentz comme

$$(w')^\mu = L^\mu{}_\nu w^\nu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.25)$$

où $L^\mu{}_\nu$ est un élément de matrice de Lorentz :

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Par exemple ;

$$\begin{aligned} (w')^0 &= L^0{}_\nu w^\nu = \sum_{\nu=0}^3 L^0{}_\nu w^\nu \\ &= L^0{}_0 w^0 + L^0{}_1 w^1 + L^0{}_2 w^2 + L^0{}_3 w^3 \\ &= \gamma w^0 - \beta\gamma w^1 = \gamma (w^0 - \beta w^1). \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} w^0 \\ w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ -w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

et que les composantes w^μ (indice en haut) sont dites composantes contravariantes et les quantités w_μ (indice en bas) composantes covariantes. Le carré de ce quadri-vecteur est donné par

$$\|\underline{w}\|^2 = \underline{w} \cdot \underline{w} = \underbrace{w^\mu w_\mu}_{\text{Contraction}} = \text{scalaire}. \quad (4.28)$$

La relation entre les composantes covariantes et contravariantes s'écrit :

$$w_\mu = g_{\mu\nu} w^\nu, \quad (4.29)$$

où $(g_{\mu\nu})$ est une matrice appelée *la métrique de Minkowski* donnée par :

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

L'invariant ds s'écrit en fonction de la métrique $g_{\mu\nu}$ de la façon suivante :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu ,$$

comme $g_{\mu\nu} dx^\nu = dx_\mu$ alors :

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}. \quad (4.31)$$

Dans la suite, on dit simplement le 4-vecteur w^ν au lieu de composantes du 4-vecteur.

Soit l'objet suivant

$$T^{\mu\nu} = v^\mu w^\nu ,$$

où v^μ et w^ν sont deux 4-vecteurs. Si on fait un changement de référentiel $(\mathcal{R}) \rightarrow (\mathcal{R}')$, alors cet objet se transforme comme :

$$(T')^{\mu\nu} = (v')^\mu (w')^\nu ,$$

avec

$$\begin{aligned} (v')^\mu &= L^\mu_\alpha v^\alpha \\ (w')^\nu &= L^\nu_\beta w^\beta , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} (T')^{\mu\nu} &= L^\mu_\alpha v^\alpha L^\nu_\beta w^\beta = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta v^\alpha w^\beta \\ &= L^\mu_\alpha L^\nu_\beta T^{\alpha\beta} , \end{aligned}$$

On peut définir un *tenseur* comme une quantité qui se transforme, lors d'une transformation de Lorentz, comme :

$$\boxed{(T')^{\mu\nu} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta T^{\alpha\beta}.} \quad (4.32)$$

Le tenseur $T^{\mu\nu}$ est un tenseur de *rang* 2 puisqu'il a deux indices (μ et ν) et il est deux fois contravariant (deux indices en haut).

- On peut avoir un tenseur de rang 2 mais deux fois covariant c'est-à-dire $T_{\mu\nu}$ (deux indices en bas). Un tenseur de rang 3 se transforme donc comme :

$$(T')^{\mu\nu\gamma} = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta L^\gamma_\sigma T^{\alpha\beta\sigma},$$

de même pour un tenseur de rang supérieur. En particulier, un tenseur de rang 1 se transforme donc comme :

$$(T')^\mu = L^\mu_\alpha T^\alpha, \quad (4.33)$$

autrement dit, un tenseur de rang 1 est un quadri-vecteur.

Un tenseur de rang 0 est un scalaire (pas d'indices), donc reste invariant (le même) $T' = T$.

- On peut définir aussi un *tenseur mixte*, c'est-à-dire à la fois covariant et contravariant. Par exemple, le tenseur de rang 3 suivant $T^{\mu\nu}_\alpha$ est un tenseur deux fois contravariant et une fois covariant. De même pour un tenseur mixte de rang supérieur.

- On peut monter et abaisser les indices au moyen du tenseur métrique :

$$T^\alpha_\beta = g_{\beta\gamma} T^{\alpha\gamma},$$

et

$$T^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma} T^\alpha_\gamma,$$

et évidemment

$$g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma} = 4. \quad (4.34)$$

- On appelle *contraction* une sommation de la forme $T_{\dots\beta\dots} G^{\dots\beta\dots}$, par exemple

$$T_{\alpha\beta\gamma} G^{\varepsilon\beta\mu} = H_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon\mu}, \quad T^{\mu\nu} v_\mu = w^\nu, \\ w^\mu w_\mu = \text{scalaire}.$$

Une contraction de deux indices répétés abaisse le rang d'un tenseur de 2.

Remarque : Si on fait une permutation d'indices d'un tenseur, on obtient en générale un tenseur différent ;

$$T_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha},$$

si, par contre, on a $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$ le tenseur est dit *symétrique*. Dans le cas où $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$ le tenseur est dit *antisymétrique*.

L'intérêt de la notation tensorielle en relativité :

Outre sa forme compacte, la notation tensorielle assure automatiquement qu'une expression obéit aux bonnes lois de transformations par changement de référentiel inertiel : si, par exemple, une loi physique s'exprime par une égalité entre deux tenseurs dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) comme suit : $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu}$, alors dans le référentiel (\mathcal{R}') elle prend la même forme entre les quantités primés correspondantes ; $G'^{\mu\nu} = R'^{\mu\nu}$. Une expression qui conserve la même forme est dite covariante.

4.6 Formulation covariante de l'électromagnétisme

4.6.1 Equations de propagation en notation covariante

Soit le 4-gradient ∂_μ tel que :

$$\begin{aligned}\partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \boxed{\partial_\mu &= \left(\partial_{ct}, \vec{\nabla} \right)},\end{aligned}\tag{4.35}$$

alors :

$$\begin{aligned}\partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \left(\partial_{ct}, -\vec{\nabla} \right),\end{aligned}$$

et on a :

$$\partial_\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \Rightarrow \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu.$$

Rappelons que le 4-potentiel est donné par l'expression :

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right).$$

Ainsi, la jauge de Lorentz s'écrit simplement de la façon suivante :

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0.}\tag{4.36}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu A^\mu &= 0 \\
 \Leftrightarrow \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} &= 0.
 \end{aligned}$$

De plus, le d'Alembertien \square s'écrit :

$$\boxed{\square = \partial^\mu \partial_\mu}. \quad (4.37)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \square &= \partial^\mu \partial_\mu = \partial^0 \partial_0 + \partial^1 \partial_1 + \partial^2 \partial_2 + \partial^3 \partial_3 \\
 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3} \\
 &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.
 \end{aligned}$$

Par suite, les relations de propagation (4.9) et (4.10) peuvent être rassemblées en une seule équation ; à savoir :

$$\boxed{\partial^\mu \partial_\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3.} \quad (4.38)$$

En outre, si on considère le 4-courant j^μ avec

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (\rho c, \vec{j}),$$

l'équation de continuité de la charge électrique s'écrit simplement comme :

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}. \quad (4.39)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu j^\mu &= 0 \\
 \Leftrightarrow \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= 0.
 \end{aligned}$$

4.6.2 Tenseur champ électromagnétique

Définition : Le *tenseur du champ électromagnétique* où $F^{\mu\nu}$ est un tenseur de rang 2 défini par :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (4.40)$$

$F^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique ;

$$\begin{aligned} F^{\nu\mu} &= \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \\ &= -F^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

et donc son diagonal est nécessairement nul.

$$F^{\mu\mu} = -F^{\mu\mu} \Rightarrow F^{\mu\mu} = 0.$$

Explicitement, ce tenseur s'écrit sous forme matricielle (2 fois contravariant) de la façon suivante

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

où (2 fois covariant) :

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta},$$

par exemple :

$$F_{01} = g_{00} g_{11} F^{01} = -F^{01}$$

$$\begin{aligned} F^{01} &= \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0, \quad \partial^1 = -\partial_x \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\frac{E_x}{c}. \end{aligned}$$

4.6.3 Equations de Maxwell covariantes

Les équations de Maxwell qui relient les champs aux sources s'écrivent d'une manière très simple comme :

$$\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.43)$$

Si on pose $\mu = 0$ dans (4.43) on a :

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \mu_0 j^0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 j^0 \\ \Leftrightarrow \partial_x \frac{E_x}{c} + \partial_y \frac{E_y}{c} + \partial_z \frac{E_z}{c} &= \mu_0 (\rho c) \\ \Leftrightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z &= \mu_0 (\rho c^2), \quad \text{comme } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \\ \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{aligned}$$

qui est l'équation de Maxwell Gauss (4.3).

Pour $\mu = 1$ dans (4.43) on a :

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{1\nu} &= \mu_0 j^1 \\ \Rightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j^1 \\ \Rightarrow -\frac{\partial E_x}{c^2 \partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \frac{\partial E_x}{c^2 \partial t} \\ \Rightarrow [\vec{rot} \vec{B}]_x &= [\mu_0 \vec{j}]_x + \mu_0 \varepsilon_0 \left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]_x, \end{aligned}$$

qui est la composante suivant x de l'équation de Maxwell Ampère (4.4).

De manière similaire, on peut trouver les autres composantes de l'équation de Maxwell Ampère pour $\mu = 2$ et $\mu = 3$.

4.7 Formulation lagrangienne de la relativité restreinte

4.7.1 Action relativiste pour une particule libre

En mécanique classique, pour une trajectoire ayant lieu entre les instants t_a et t_b , l'action est définie par :

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt, \quad (4.44)$$

où $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ est le *lagrangien* et q est une coordonnée généralisée. Le principe de *moindre action* d'Hamilton stipule que la trajectoire réelle du système est telle que l'action est stationnaire :

$$\delta \mathcal{A} = 0. \quad (4.45)$$

Alors (4.44) donne :

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0,$$

notons que $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$ et intégrons le deuxième terme par partie, il vient :

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} d(\delta q) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta q d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right).$$

Le terme intégré est nul à cause des conditions aux bornes $\delta q(t_a) = \delta q(t_b) = 0$, il reste :

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0, \quad \forall \delta q$$

Alors l'intégrand doit être nul, d'où l'on déduit les équations du mouvement d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (4.46)$$

En mécanique relativiste, l'unicité de la trajectoire (la ligne d'univers) laisse à penser que l'action ne doit pas dépendre du référentiel dans lequel elle est évaluée. Autrement dit, l'action doit être une quantité invariante par changement de référentiel. Mais, comme le temps t dépend du référentiel dans lequel on se place, on va utiliser un temps indépendant du référentiel, nous introduisons dans la relation (4.44) le temps propre ; c-à-d :

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \gamma \mathcal{L} d\tau, \quad (4.47)$$

où $d\tau = dt/\gamma = ds/c$ et $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ avec v la vitesse de la particule.

Une manière de rendre l'action \mathcal{A} invariante par changement de référentiel est de faire en sorte que la quantité sous le signe intégral soit une constante que l'on désigne par α . c-à-d :

$$\gamma\mathcal{L} = \alpha \Rightarrow \mathcal{L} = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Puisque nous devons conserver la compatibilité avec la mécanique classique, on espère alors déterminer la constante α en supposons qu'aux faibles vitesses, on doit retrouver le lagrangien de la mécanique classique :

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq \alpha - \frac{v^2 \alpha}{2c^2}, \quad (4.48)$$

le terme constant ne joue aucun rôle dans l'action classique. Pour que le terme en v^2 coïncide avec l'énergie cinétique, il faut que $\alpha = -mc^2$. On obtient ainsi le lagrangien relativiste pour une particule libre :

$$\boxed{\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.49)$$

L'action s'écrit simplement :

$$\mathcal{A} = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} d\tau = -mc \int_{t_a}^{t_b} ds. \quad (4.50)$$

En coordonnées cartésiennes, par exemple, le lagrangien relativiste (4.49) s'écrit :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}},$$

on en déduit les composantes de l'impulsion relativiste :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \gamma m \dot{x} = p_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \gamma m \dot{y} = p_y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \gamma m \dot{z} = p_z$$

L'énergie totale du système est égale à :

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \mathcal{L} \\ &= \gamma m \dot{x}^2 + \gamma m \dot{y}^2 + \gamma m \dot{z}^2 + \frac{mc^2}{\gamma} \\ &= \gamma m v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} = \gamma m c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right), \end{aligned}$$

puisque $\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1$, on retrouve ainsi la formule :

$$E = \gamma m c^2. \quad (4.51)$$

Cette dernière quantité s'exprime également en fonction de l'impulsion, on parle alors de l'hamiltonien :

$$H = E = c \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (4.52)$$

4.7.2 Action relativiste d'une particule chargée dans un champ électromagnétique

L'action d'une particule de charge q placée dans un champ électromagnétique est la somme de deux termes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_p + \mathcal{A}_{int} . \quad (4.53)$$

\mathcal{A}_p : action de la particule libre donnée par (4.50) comme :

$$\mathcal{A}_p = -mc \int_a^b ds , \quad (4.54)$$

et l'action \mathcal{A}_{int} décrivant l'interaction avec le champ. On postule que ce terme d'interaction a pour expression :

$$\mathcal{A}_{int} = -q \int_a^b A^\mu dx_\mu , \quad (4.55)$$

où

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) ,$$

le produit scalaire $A^\mu dx_\mu$ est bien un invariant de Lorentz et le signe $(-)$ est justifié par la limite non relativiste. On écrit alors l'action comme :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-mcds - qA^\mu dx_\mu) , \quad (4.56)$$

en notation tridimensionnelle,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_a^b \left(-mc^2 d\tau - q \frac{\phi}{c} cdt + q \vec{A} d\vec{r} \right) \\ &= \int_a^b \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q \vec{A} \cdot \vec{v} \right) dt , \end{aligned}$$

ce qui conduit au lagrangien relativiste :

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q \vec{A} \cdot \vec{v} . \quad (4.57)$$

A la limite non relativiste, il devient :

$$\mathcal{L} \simeq -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q \vec{A} \cdot \vec{v} . \quad (4.58)$$

Exercice d'application :

L'action d'une particule de charge q et de masse m soumise à un champ électromagnétique entre deux événements d'espace-temps a et b est donnée par l'expression :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-mcds - qA^\mu dx_\mu) .$$

1) On modifié le 4-potentielle par une transformation de jauge,

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi .$$

Montrer, dans ce cas, qu'on a la même minimisation de \mathcal{A} . Que peut on déduire concernant la physique du problème ?

2) Utiliser le principe de moindre action pour montrer que les équations du mouvement correspondantes ont la forme covariante suivante :

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} v^\nu .$$

3) En déduire les équations classiques du mouvement.

Solution :

L'action d'une particule de charge q et de masse m soumise à un champ électromagnétique :

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-mcds - qA^\mu dx_\mu) .$$

1) On modifié le 4-potentielle par une transformation de jauge,

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi ,$$

alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \tilde{\mathcal{A}} = \int_a^b (-mcds - q(A^\mu + \partial^\mu \chi) dx_\mu) \\ &= \int_a^b (-mcds - qA^\mu dx_\mu) - q \int_a^b \partial^\mu \chi dx_\mu \\ &= \mathcal{A} - q \int_a^b \frac{\partial \chi}{\partial x_\mu} dx_\mu \\ &= \mathcal{A} - q \int_a^b d\chi = \mathcal{A} - q [\chi(b) - \chi(a)] , \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ ne varie que d'une quantité globale indépendante du chemin suivi entre a et $b \Rightarrow$ La minimisation de $\tilde{\mathcal{A}}$ est donc équivalente à celle de \mathcal{A} c-à-d : $\delta \tilde{\mathcal{A}} = \delta \mathcal{A}$ et la physique est invariante par changement de jauge.

2) Le principe de moindre action stipule que la trajectoire réelle de la particule est telle que l'action est stationnaire :

$$\delta \mathcal{A} = 0 ,$$

c-à-d :

$$\delta \mathcal{A} = \int_a^b \left(-mc \delta \left(\sqrt{dx_\mu dx^\mu} \right) - q \delta (A_\mu dx^\mu) \right) = 0 , \quad (4.59)$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{dx_\mu dx^\mu} &= \frac{1}{2} (dx_\mu dx^\mu)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{[\delta (dx_\mu) dx^\mu + dx_\mu \delta (dx^\mu)]}_{=2\delta(dx_\mu)dx^\mu} \\ &= \frac{dx^\mu}{ds} \delta (dx_\mu) \\ &= \frac{1}{c} v^\mu \delta (dx_\mu) \quad \text{puisque } ds = cd\tau \end{aligned}$$

On a de plus $\delta (dx_\mu) = d(\delta x_\mu)$, soit :

$$\begin{aligned} \int_a^b -mc \delta \left(\sqrt{dx_\mu dx^\mu} \right) &= -m \int_a^b v^\mu d(\delta x_\mu) \\ &= -m [v^\mu (\delta x_\mu)]_a^b + m \int_a^b dv^\mu \delta x_\mu , \quad \text{par IPP} \end{aligned}$$

Ici, a et b repèrent les coordonnées d'espace-temps de deux événements entre lesquels on minimise l'action. Ainsi, les termes intégrés disparaissent car les variations δx_μ sont nulles aux extrémités de la ligne d'univers ; $\delta x_\mu(a) = \delta x_\mu(b) = 0$.

Soit :

$$\int_a^b -mc \delta \left(\sqrt{dx_\mu dx^\mu} \right) = m \int_a^b dv^\mu \delta x_\mu . \quad (4.60)$$

Calculons maintenant le terme :

$$-q \int_a^b \delta (A_\mu dx^\mu) = -q \int_a^b (A_\mu d\delta x^\mu + \delta (A_\mu) dx^\mu) ,$$

on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b A_\mu d\delta x^\mu &= \underbrace{[A_\mu \delta x^\mu]_a^b}_{=0} - \int_a^b (dA_\mu) \delta x^\mu \\ &= - \int_a^b (dA_\mu) \delta x^\mu , \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$-q \int_a^b \delta (A_\mu dx^\mu) = q \int_a^b (dA_\mu) \delta x^\mu - q \int_a^b \delta (A_\mu) dx^\mu , \quad (4.61)$$

remplaçons (4.60) et (4.61) dans (4.59), on obtient :

$$\delta \mathcal{A} = \int_a^b [mdv^\mu \delta x_\mu + q (dA_\mu) \delta x^\mu - q \delta (A_\mu) dx^\mu] = 0 .$$

En utilisant de plus :

$$\begin{aligned} \delta (A_\mu) &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \\ \text{et } dA_\mu &= \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu , \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &= \int_a^b \left[mdv^\mu \delta x_\mu + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \delta x^\mu - q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu dx^\mu \right] = 0 \\ &= \int_a^b \left[m \frac{dv^\mu}{d\tau} d\tau \delta x_\mu + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau \delta x^\mu - q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau \right] = 0 \\ &= \int_a^b \left[m \frac{dv_\mu}{d\tau} + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} v^\nu - q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} v^\mu \underbrace{\frac{\delta x^\nu}{\delta x^\mu}}_{=\delta_\mu^\nu} \right] d\tau \delta x^\mu = 0 \\ &= \int_a^b \left[m \frac{dv_\mu}{d\tau} + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} v^\nu - q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} v^\nu \right] d\tau \delta x^\mu = 0 , \end{aligned}$$

d'où les équations du mouvement sous forme tensorielle :

$$\begin{aligned} m \frac{dv_\mu}{d\tau} + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} v^\nu - q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} v^\nu &= 0 \\ \Rightarrow m \frac{dv_\mu}{d\tau} + q (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) v^\nu &= 0 , \end{aligned}$$

mais : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, et alors :

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{dv_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} v^\nu} , \quad (4.62)$$

ou bien :

$$ma_\mu = q F_{\mu\nu} v^\nu ,$$

où $a_\mu = \frac{dv_\mu}{d\tau}$ est la 4-accélération.

3) Equations classiques :

L'équation (4.62) s'écrit aussi :

$$m\gamma \frac{dv_\mu}{dt} = qF_{\mu\nu}v^\nu ,$$

rappelons que :

$$v^\mu \equiv \underline{v} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \Rightarrow v_\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ -\gamma \vec{v} \end{pmatrix} ,$$

pour $\mu = 0$ on a :

$$\begin{aligned} m\gamma \frac{dv_0}{dt} &= qF_{0\nu}v^\nu \\ &\Rightarrow \gamma \frac{d(\gamma mc)}{dt} = qF_{0\nu}v^\nu , \end{aligned}$$

mais $m\gamma c = \frac{\mathcal{E}}{c}$, (\mathcal{E} ici est l'énergie). Il vient :

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)}{dt} &= qF_{0i}v^i = q(F_{01}v^1 + F_{02}v^2 + F_{03}v^3) \\ &\Rightarrow \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(F_{01}v^1 + F_{02}v^2 + F_{03}v^3) . \end{aligned}$$

Soit:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} ,$$

alors,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= q \left(\frac{E_x}{c} \gamma v_x + \frac{E_y}{c} \gamma v_y + \frac{E_z}{c} \gamma v_z \right) \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(\vec{E} \cdot \vec{v})} . \end{aligned}$$

Cette première équation rappelle que seul le champ électrique fournit du travail.

pour $\mu = 1$, on a :

$$\begin{aligned} -m\gamma \frac{d\gamma v_x}{dt} &= q(F_{1\nu}v^\nu) \\ &\Rightarrow -m\gamma \frac{d\gamma v_x}{dt} = q(F_{10}v^0 + F_{11}v^1 + F_{12}v^2 + F_{13}v^3) \\ &\Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = q(E_x + B_z v_y - B_y v_z) , \quad \text{puisque } p_x = m\gamma v_x \\ &\Rightarrow \frac{dp_x}{dt} = q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]_x , \end{aligned}$$

de même pour $\mu = 2$, $\mu = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dp_y}{dt} &= q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]_y \\ \frac{dp_z}{dt} &= q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]_z ,\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)},$$

qui est la force de Lorentz.

4.8 Incompatibilité de la relativité avec la théorie de la gravitation

La théorie de la relativité restreinte décrit avec succès l'électrodynamique, mais elle souffre d'un inconvénient majeur : elle est incompatible avec la théorie de la gravitation de Newton. En effet, comme on a vu au chapitre 2, l'action gravitationnelle d'une masse sur une autre est instantanée selon la vision de Newton alors que la relativité propose une vitesse limite c pour les interactions. Cela ne veut pas dire que l'une des deux théories est fausse. Cela s'explique simplement qu'elles sont toutes deux des approximations (des cas limites), d'une théorie "relativiste" plus générale appelée la théorie de *la relativité générale* qui a été développée par Einstein entre 1907 et 1915. La théorie de Newton n'est valable donc que lorsque les vitesses des corps sont très petites par rapport à la vitesse de la lumière et quand la gravitation est faible.

4.9 Exercices

Exercice 01 : (*Transformations de jauge*)

Les champs électrique et magnétique sont donnés en termes des potentiels comme suit :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

1) Vérifier que \vec{E} et \vec{B} restent les mêmes par transformations de jauge suivantes :

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \partial_t \chi \\ \vec{A} \rightarrow \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \end{cases}$$

où χ est une fonction scalaire.

2) On utilise cette liberté de jauge dans la définition de ϕ et \vec{A} . Montrer ainsi qu'on peut imposer la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \phi = 0$ connue comme condition de Lorentz.

Exercice 02 : (*Champs et potentiels d'une charge en mouvement rectiligne uniforme*)

Une charge q se déplace dans le référentiel (\mathcal{R}) du laboratoire avec une vitesse $\vec{v} = \vec{\beta} c$ constante, suivant la direction Ox . Elle est à l'origine O à l'instant $t = 0$. A l'instant t , le vecteur position joignant la charge q , placée à l'origine O' du référentiel (\mathcal{R}') qui lui est lié, au point M défini par $\vec{OM} = \vec{r}$ dans (\mathcal{R}) et $\vec{r'} = \vec{O'M}$ dans (\mathcal{R}') avec $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$ dans (\mathcal{R}) . On pose : $\theta = (\vec{v}, \vec{R})$.

1) a) Exprimer, dans (\mathcal{R}) , le champ électrique \vec{E} créé par la charge q au point $M(x, y, z)$ à l'instant t .

b) Montrer que l'expression du champ \vec{E} dans (\mathcal{R}) peut s'écrire :

$$\vec{E} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

comment varie $|\vec{E}|$ avec θ ? Conclusion ?

2) a) Exprimer, dans (\mathcal{R}) , le champ magnétique \vec{B} créé par la charge q en M .

b) Dans le cas particulier où $v \ll c$, retrouver les lois classiques de Biot et Savart et de Coulomb.

3) a) Exprimer, dans (\mathcal{R}) , le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur \vec{A} en $M(x, y, z)$ à l'instant t .

b) En déduire, à partir des potentiels $\phi(x, y, z)$ et $\vec{A}(x, y, z, t)$ les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} en $M(x, y, z)$ à l'instant t dans (\mathcal{R}) ..

Exercice 03 : (*Formules de transformation des champs et invariants relativistes*).

1) Donner la loi de transformation du tenseur champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ lors d'une transformation de Lorentz.

2) Trouver les formules de transformation des champs électrique et magnétique en calculant les composantes suivantes :

$$F'^{01}, F'^{02}, F'^{03}, F'^{12}, F'^{13} \text{ et } F'^{23}$$

3) Vérifier l'invariance relativiste des quantités : $E^2 - c^2 B^2$ et $\vec{E} \cdot \vec{B}$

Exercice 04 :

Soit le tenseur du champ électromagnétique :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

Développer l'expression $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ en termes de \vec{E} et \vec{B} .

Exercice 05 :

Vérifier que le d'Alembertien $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ est un invariant de Lorentz.

Exercice 06 : (*Formulation covariante des équations de Maxwell*)

1) Les 4 équations de Maxwell peuvent se mettre sous une forme covariante. En effet, vérifier que :

i) Les deux équations de Maxwell inhomogènes s'écrivent aussi comme :

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 j^\mu$$

ii) Les deux équations de Maxwell homogènes s'écrivent :

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (\text{l'identité de Bianchi})$$

où $F^{\mu\nu}$ est le tenseur du champ électromagnétique.

2) Vérifier que chaque composante du champ électromagnétique, dans le vide (en l'absence de charges et de courants $j^\mu = 0$), satisfait l'équation d'onde suivante :

$$\square F_{\mu\nu} = 0$$

Exercice 07 :

L'action relativiste relative à une particule libre est donnée par l'expression :

$$\mathcal{A} = \alpha \int_a^b ds$$

où a et b sont les positions initiale et finale de la particule aux instants respectifs t_1 et t_2 .

- 1) Que doit être cette action par un changement de référentiel galiléen ?
- 2) Trouver la valeur de la constante α en considérant la limite non relativiste.
- 3) En minimisant cette action, montrer qu'on obtient l'équation de mouvement de la particule libre :

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

où $p_\mu = mv_\mu$.

Exercice 08 :

Soit l'action de Maxwell

$$\mathcal{A} = - \int \left(\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu \right) d^4x$$

- 1) Montrer que l'élément de volume d'espace-temps $d^4x = dx dy dz dt$ est un invariant de Lorentz.
- 2) Montrer, en minimisant cette action, qu'on obtient les équations de Maxwell avec sources suivantes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

Références

- (1) L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des champs, chapitre 1*. (Ellipses, 1994).
- (2) C. Grossetête, *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*. (Ellipses, 1985).
- (3) H. Lumbroso, *Relativité. Problèmes résolus*. (McGraw-Hill, 1983).
- (4) P. L Sardesai, *A Primer of special relativity*. (New Age International (P) Ltd., Publishers, 2008)
- (5) B. Berche, "*Licence de Physique et un peu après. Relativité*". Université Henri Poincaré, Nancy 1.
- (6) José-Phillipe pérez, *Relativité et invariance*. (Dunod, 2005).

N.B : La majorité des exercices dans ce polycopié sont sélectionnés notamment à partir de la référence (3).